UDK: 627.13
Originalni naučni rad

NUMERIČKO MODELIRANJE RAVANSKOG TRANSPORTA ZAGAĐIVAČA – REZULTAT TESTIRANJA

Nikola ROSIĆ, Anja RANĐELOVIĆ
Građevinski fakultet u Beogradu
Nikola STOŠIĆ
Institut za Vodoprivredu „Jaroslav Černi“

REZIME

U radu se predstavlja postupak za proračun ravanskog transporta konzervativnog zagađivača primenom metode konačnih razlika u slučajevima kada se rapolaže vrednostima srednjih brzina i dubina u nepravilno raspoređenim vertikalama toka. Kako bi računski postupak bio povoljan za paralelizaciju, predloženi metod uključuje primenu eksplicitne sheme za vremensku integraciju jednačina transporta i korišćenje pravougane ekvidistantne računske mreže. Opisani metod je primenjen na rešavanje transporta trasera u protočnom jezeru. Za interpolaciju brzina i dubina u tačkama ekvidistantne mreže, korišćen je postupak koji se zasniva na primeni Thiessen-ovih poligona i SPH (Smoothed Particle Hydrodynamics) interpolacije. U računskom primeru je pokazano je kako se rezultati upotrebe hidrodinamičkog modela koji se koristi u programu HEC-RAS mogu, primenom algoritma za interpolaciju dubina i brzina, upotrebiti u proračunu ravanskog transporta pomoću metode konačnih razlika.

Ključne reči: transport zagađivača, interpolacija brzina i dubina, SPH, HEC-RAS 2D

1. UVOD

Modelom transporta zagađivača opisuje se promena koncentracije (uglavnom, masene ili zapreminske) određene materije u nekom fluidu. Problem transporta je pre svega značajan sa stanovišta zaštite životne sredine. Tako se na primer, pri projektovanju kanalizacionih sistema, mora voditi računa o uticaju efluenta na kvalitet vode u prijemnim tokovima. Upravo se, modeli transporta zagađivača, mogu koristiti kako bi se procenila promena koncentracije zagađivača duž vodotoka i time opravdala određena projektantska rešenja tj. pokazalo da je koncentracija zagađivača u prijemnim tokovima za „projektovano“ stanje u okviru dozvoljenih granica [1].

Proračun transporta zagađivača zahteva poznavanje izgleda strujne slike. Primena numeričkih modela tečenja, omogućava da se na relativno „jeftin“ način proceni izgled strujne slike u vodotoku pri različitim protocima. Višedimenzionalni modeli tečenja (2D i 3D modeli) se uglavnom koriste kada se ispituju „lokalni“ uslovi tečenja [2], [3] dok je upotreba linijskih modela (1D) opravdana kada je na dužim deonicama vodotoka potrebno naći vezu između protoka i nivoa.

U hidrotehničkoj praksi se može javiti slučaj da se tokom projektovanja ne vodi računa o lokalnim uslovima strujanja u blizini ispusta zagađivača i da se, na primer, analizom linijskog (1D) tečenja previde recirkulacione zone u blizini lokacije gde se u vodotok ispušta zagađivač. U tom slučaju, uputno je ispitati hidrodinamiku prijemnog vodotoka primenom više dimenzionalnog računskog modela tečenja (2D ili 3D modela).

Kada se poznaje prostorni (3D) raspored brzina i dubina u vodotoku, mogu se koristiti i prostorni modeli transporta koji će kao rezultat dati promenu prostornog rasporeda koncentracije [1]. Slično, ako se primeni ravanski (2D) model transporta, na osnovu dubina i po dubini osrednjih brzina može se, duž vodotoka, dobiti raspored po dubini osrednjenih koncentracija u poprečnom profilu (raspored po širini toka) [4].

Trebalo bi istaći da u domaćoj hidrotehničkoj praksi nije česta primena višedimenzionalnih modela transporta kao u ostalom ni višedimenzionalnih modela tečenja. Ipak, u poslednje vreme sve češće se u praksi [4], [6] koristi model ravanskog tečenja koji je deo programa HEC-RAS [7]. Sa druge strane, višedimenzionalni modeli transporta se retko primenjuju pa se u domaćoj praksi ne može izdvojiti nijedan računski model kao standardni.

Kompleksnost postupka numeričkog modeliranja višedimenzionalnog transporta može se objasniti složenošću procesa koji se analiziraju (modeliraju) ali i potrebnim poznavanjem različitih složenih procedura za formiranje računskog modela odnosno prethodnu pripremu za izvođenje numeričkih simulacija (izbor odgovarajućeg modela, formiranje računske mreže, određivanje parametara modela itd.).

Cilj ovog rada je da se predstavi postupak modeliranja ravanskog transporta u slučaju kada se unapred poznaje hidrodinamika nekog toka (poznate dubine i brzine). Predstavljen je postupak za proračun transporta pomoću metode konačnih razlika u okviru koje se primenjuje najjednostavniji tip računske mreže – pravougaona ekvidistantna mreža. Predloženi postupak uključuje primenu interpolacione tehnike koja omogućava da se brzine i dubine odrede u tačkama mreže na osnovu vrednosti ovih veličina u vertikalama toka koje ne moraju biti pravilno raspoređene. Izračunavanje brzina i dubina u tačkama ekvidistantne mreže se obavlja primenom interpolacione teorije na kojoj se zasniva SPH metoda za modeliranje tečenja [8], [9]. Prema ovoj metodi, vrednosti fizičkih veličina koje se vezuju za fluidne deliće određuju se nelinearnom interpolacijom na osnovu vrednosti istih veličina u okolnim fluidnim delićima. S obzirom da se koriste vrednosti samo okolnih fluidnih delića, interpolacija ima lokalni karakter. Da bi se u ovom radu koristila ista tehnika za interpolaciju kao u SPH metodi, neophodno je vertikalama (tačkama mreže) sa poznatim brzinama „pridružiti“ odgovarajuće zapremine (površine u horizontalnoj ravni) što je učinjeno korišćenjem Tiesenovih poligona [10].

Na jednom primeru iz prakse, prikazano je kako se mogu koristiti rezultati proračuna u programskom paketu HEC-RAS (model HECRAS 2D) za proračun ravanskog transporta pomoću metode konačnih razlika bez potrebe za formiranjem krivolinijske računske mreže. Opisani postupak je posebno interesantan jer programski paket HEC-RAS ne sadrži „deo“ za modeliranje ravanskog transporta.

2. MATEMATIČKI MODEL TRANSPORTA

Matematički model ravanskog transporta konzervativnog zagađivača može se predstaviti sledećom jednačinom:

$$\frac{\partial H\tilde{C}}{\partial t}+\frac{\partial H\tilde{u}_i\tilde{C}}{\partial x_i}=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(HD_{L_{ij}}\frac{\partial\tilde{C}}{\partial x_j}\right)+\frac{\partial}{\partial x_i}\left(HD_{xi}\frac{\partial\tilde{C}}{\partial x_i}\right),\qquad(1)$$

gde su H - dubina, $\tilde{C}$ - po dubini osrednjena koncentracija zagađivača, $\tilde{u}_i$ - vektor po dubini osrednjene brzine, $D_{L_{ij}}$ - tenzor čiji su članovi koeficijenti disperzije za različite pravce i D_{xi} - vektor čije su komponente koeficijenti difuzije za dva ortogonalna (koordinatna) pravca. S obzirom da se analiziraju turbulentni tokovi, sve veličine su vremenski osrednjene u okviru intervala koji mora biti duži od vremenske razmere turbulentnih procesa. Uticaji vremenskog i prostornog osrednjavanja, sadržan je u članovima na desnoj strani jednačine (disperzioni i difuzioni član).

Težište ovog rada nisu sami transportni procesi, već numerički postupci proračuna transporta trasera, zato se neće ulaziti u strukturu ovih koeficijenata. Radi jednostavnosti, uzeće se da su dijagonalni članovi tenzora $D_{L_{ij}}$ jednaki i da je disperzija dominantan proces transporta. Ako se još izostave mešoviti članovi izvoda koncentracije i usvoje koordinatni pravci x i y dobija se sledeći oblik advekciono-disperzione jednačine:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial H\tilde{C}}{\partial t}+\frac{\partial(H\tilde{u}\tilde{C})}{\partial x}+\frac{\partial(H\tilde{v}\tilde{C})}{\partial y}=\\&=D\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(H\frac{\partial\tilde{C}}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(H\frac{\partial\tilde{C}}{\partial y}\right)\right).\end{aligned}\qquad(2)$$

U jednačini (2) je sa D označen koeficijent disperzije dok su komponente po dubini osrednjene brzine u x i y pravcima, redom označene sa $\tilde{u}$ i $\tilde{v}$.

Prikazana jednačina se rešava numerički. Pored definisanja postupka za numeričku integraciju, jasno je da se moraju poznavati (izračunati) srednje brzine u vertikalama toka odnosno dubine toka.

3. NUMERIČKI MODEL

U ovom radu primenjena je metoda konačnih razlika za aproksimaciju izvoda. Primenjena je pravougaona ekvidistantna računska mreža. Pri tome se koristi eksplicitna shema za vremensku integraciju transportne jednačine. Ove „osobine“ numeričkog postupka omogućavaju jednostavnu paralelizaciju numeričkog proračuna.

Pretpostavlja da se vrednosti dubina i brzina poznaju u vertikalama toka koje ne koincidiraju sa položajem tačaka (vertikala) računske mreže. Zato je pored definisanja sheme za aproksimaciju izvoda potrebno definisati postupak za interpolaciju polja brzina i dubina kako bi se vrednosti ovih veličina odredile u tačkama mreže.

3.1. Aproksimacija izvoda

Kao što je napomenuto, koristi se ekvidistantna računska mreža pa za prostorni korak važi da je $\Delta x = \Delta y$. Vremenska integracija transportne jednačine (2) se obavlja shemom Du Fort - Frankel [11] koja predstavlja modifikovanu Leapfrog shemu. Prema usvojenoj shemi članovi sa drugim izvodom (disperzioni članovi) računaju se na sledeći način:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tilde{C}}{\partial x^2} &\approx \frac{\tilde{C}^n_{i+1,j} - \tilde{C}^{n+1}_{i,j} - \tilde{C}^{n-1}_{i,j} + \tilde{C}^n_{i-1,j}}{\Delta x^2}, \\ \frac{\partial^2 \tilde{C}}{\partial y^2} &\approx \frac{\tilde{C}^n_{i,j+1} - \tilde{C}^{n+1}_{i,j} - \tilde{C}^{n-1}_{i,j} + \tilde{C}^n_{i,j-1}}{\Delta x^2}, \end{aligned} \tag{3}$$

gde indeksi i i j redom označavaju rednu tačku računske mreže po x i y pravcu a indeks n vremenski korak. Svi ostali prvi izvodi (prostorni i vremenski), računaju se korišćenjem centralnih razlika (CTCS – *Central Time Central Space*):

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} &\approx \frac{f^{n+1}_{i,j} - f^{n-1}_{i,j}}{2\Delta t}, \\ \frac{\partial f}{\partial x} &\approx \frac{f^n_{i+1,j} - f^n_{i-1,j}}{2\Delta x}, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &\approx \frac{f^n_{i,j+1} - f^n_{i,j-1}}{2\Delta x}, \end{aligned} \tag{4}$$

gde je f proizvoljna funkcija. U prikazanim jednačinama, svi izvodi se računaju u tački sa indeksima i i j.

Usvojena shema je karakteristična po tome da je u odnosu na standardnu aproksimaciju drugog izvoda, gde se u imeniocu, sa desne strane izraza (3), umesto $\tilde{C}^n_{i+1,j} - 2\tilde{C}^n_{i,j} + \tilde{C}^n_{i-1,j}$, odnosno, $\tilde{C}^n_{i,j+1} - 2\tilde{C}^n_{i,j} + \tilde{C}^n_{i,j-1}$, koristi koncentracija osrednjena po vremenu $\tilde{C}^n_{i,j} = \left(\tilde{C}^{n+1}_{i,j} + \tilde{C}^{n-1}_{i,j}\right)/2$, kako bi se izbegla nestabilnost proračuna koja se javlja kod modeliranja čiste difuzije pomoću centralnih razlika po vremenu i prostoru.
S obzirom da se nepoznata koncentracija (u vremenskom trenutku $n+1$) može izračunati direktno preko poznatih vrednosti tj. nije potrebno rešavanje sistema jednačina niti iterativno rešavanje jednačina, shema je eksplicitna. Navedena osobina sheme omogućava primenu računskih operacija koje se paralelno mogu sprovoditi na procesorima grafičkih karti (GPGPU) čime se vreme proračuna znatno može skratiti. Posebna pogodnost u ovom slučaju predstavlja i pravilan raspored računskih tačaka.

Prikazana shema je bezuslovno stabilna pri modeliranju čiste difuzije ali je uslovno stabilna pri modeliranju transporta sa advekcijom i difuzijom (i/ili disperzijom). Analizom numeričke stabilnosti sheme za razmatrani problem (advektivno-disperziona jednačina) dobija se sledeći uslov koji u proračunu mora biti ispunjen kako bi računska shema bila stabilna [12]:

$$\sqrt{A^2 + B^2} - A \le E, \tag{5}$$

gde su:

$$\begin{aligned} A &= 4D\frac{\Delta t}{\Delta x^2}, \\ B &= \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\tilde{u} + \tilde{v}\right), \\ E &= \Delta t\left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y}\right). \end{aligned} \tag{6}$$

Može se primetiti da je za slučaj čiste difuzije (nema advekcije) zadovoljen uslov stabilnosti za proizvoljne vrednosti računskih parametara (shema je bezuslovno stabilna).

3.2. Interpolacija brzina i dubina

Za rešavanje jednačine transporta potrebno je poznavati brzine i dubine u tačkama računske mreže. S obzirom da se razmatra scenario u kojem se raspolaže sa izračunatim (ili izmerenim) brzinama i dubinama u tačkama (u daljem tekstu merne tačke) koje su nepravilno raspoređene u horizontalnoj ravni, potrebno je interpolacijom odrediti brzine i dubine u tačkama računske mreže. Za tu svrhu, korišćen je originalni postupak koji se može predstaviti kao kombinacija primene Thiessen-ovih poligona i SPH metode za interpolaciju u strujnom polju.

U SPH metodi, vrednosti neke fizičke veličine (ili njeni izvodi) u proizvoljnoj tački prostora određuju se kao suma proizvoda vrednosti težinske funkcije, zapremine i same fizičke veličine, koje su „dodeljene“ fluidnim delićima udaljenim, od tačke za koju se obavlja interpolacija, manje od vrednosti takozvane širine uticaja [9].U ravanskim problemima, fluidnim delićima se, umesto zapremine, pridružuje površina u planu A_j, pa se dobija sledeći izraz za interpolaciju vrednosti proizvoljne veličine f (u ovom radu to su dubine i brzine):

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{N} A_j f(\mathbf{x}_j) W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j, h) \ , \qquad (7)$$

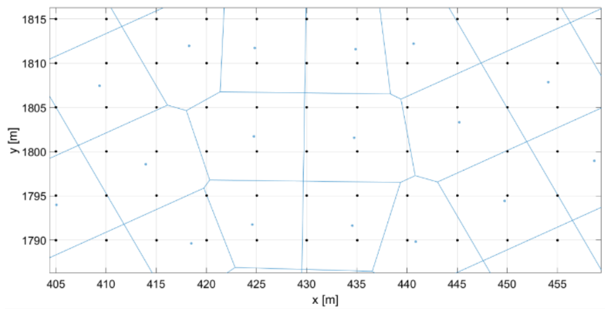
gde su $\mathbf{x}$ vektor položaja tačke u kojoj se interpolacijom računa vrednost funkcije f, $\mathbf{x}_j$ vektor položaja „merne“ tačke sa indeksom j (susedna tačka), W težinska funkcija i h je polovina vrednosti „širine“ uticaja. Ukoliko je rastojanje između tačke za koju se vrši interpolacija i neke merne tačke veće od $2h$ ta merna tačka ne učestvuje u interpolaciji tj. za zadatu tačku ne predstavlja susednu tačku.

Kao težinska funkcija u ovom radu se koristi polinom četvrtog stepena:

$$W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j, h) = \frac{7}{4\pi} \cdot h^2 (1 - \frac{q}{2})^4 (2q + 1) \ , \qquad (8)$$

gde je $q = \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j|}{h}$.

Metoda za interpolaciju korišćena u ovom radu koristi isti pristup pri interpolaciji, sa tim da je pored poznavanja brzina i dubina, odnosno definisanja težinske funkcije, potrebno u mernim tačkama odrediti pripadajuće površine. Upravo za tu svrhu, pravougaoni računski domen koji uokviruje merne tačke, podeljen je na površine oivičene Thiessen-ovim poligonima čiji su centri tačke sa poznatim brzinama i dubinama. Tako određene površine koriste se u interpolacionoj sumi (izraz 7).



Slika 1. Računska mreža i Tisenovi poligoni

Na slici 1 prikazan je deo računskog domena iz test primera opisanog u ovom radu. Plavom bojom označene su tačke sa poznatim dubinama i granice pripadajućih površina (Tisenovi poligoni) dok su crnom bojom označene tačke računske mreže tj. tačke u kojima se računa promena koncentracije (i interpoluju dubine i brzine).

Predloženi metod omogućava primenu nelinearne interpolacije koja ima lokalni karakter. Trebalo bi, međutim, imati u vidu da se lokalna interpolacija obavlja tek nakon primene algortima za pretraživanje okolnih tačaka sa poznatim dubinama i brzinama tj. utvrđivanja susednih tačaka. Pri tome se može primeniti neki od standardnih algoritama koji se koriste u SPH metodi [13].

3.3. Granični i početni uslov

Kako bi računska šema bila u potpunosti definisana, potrebno je pokazati na koji način se, u numeričkim simulacijama, uzima u obzir uticaj granica računskog domena tj. dela fizičkog domena izvan granica računske oblasti (granični uslov).

Pored graničnog uslova, potrebno je poznavati početne vrednosti koncentracije (početni uslov). S obzirom da Du Fort Frankel metoda, za tekući računki korak (vremenski trenutak), zahteva poznavanje koncentracija u prethodnom računskom koraku, u početnom računskom koraku je potrebno definisati poseban način za aproksimaciju vremenskog izvoda ili zadati vrednost koncentracije u „prethodnom“ koraku.

Osnovni problem u primeni pravougaone računske mreže je u tome što ovakav tip mreže zahteva usitnjavanje prostornog računskog koraka i promenu orjentacije mreže kako bi se položaj računskih tačaka podudarao, u opštem slučaju, sa linijom „stvarne“ granice tečenja. Dodatno, u ovom radu se pretpostavlja da ove granice nisu poznate već su poznate samo dubine i brzine u odgovarajućim vertikalama toka. Kao što je to slučaj i u nekim često primenjivanim varijantama SPH metode [9], ovde se neće eksplicitno definisati „stvarni“ položaj granice tečenja. Za svaku tačku pravougaone oblasti koja oivičava tačke sa poznatim brzinama i dubinama, na osnovu sume vrednosti težinskih funkcija u okolnim mernim tačkama:

$$W_{sum}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{N} A_j W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j, h) \ , \qquad (9)$$

određuje se da li je tačka unutar ili izvan „stvarnih granica tečenja, pa samim tim da li je granica u blizini razmatrane tačke. Ako je izračunata suma manja od usvojene granične vrednosti uzima se da je tačka izvan granica tečenja (na suvom) i obrnuto, ako je izračunata suma veća od granične, tačka je unutar granice tečenja (pod vodom). Procenjen položaj granice tečenja naći će se, logično, između tačaka na suvom i tačaka pod vodom. Ako je potrebno nacrtati liniju granice tečenja (odrediti „tačan“ položaj granice tečenja), može se, na primer, koristiti tehnika za vizuelizaciju pod nazivom *Marching Cubes* [14].

Granični uslov se definiše za tačke između kojih se nalazi granica (susedne tačke koje su sa različite strane granica tečenja). Za tačke u blizini obala i nizvodne granice, u analiziranom računskom primeru, gradijent koncentracije u pravcu koji seče granicu jednak je nuli.

Na uzvodnoj granici se eksplicitno zadaju vrednosti koncentracija (uzvodni granični uslov) čime se inicira promena koncentracije zagađivača u računskom domenu. Poželjno je da se orijentacija računske mreže podesi tako da se linija uzvodne granice podudara sa mernim tačkama na nizvodnom kraju (ako su one kolinearne).

4. RAČUNSKI PRIMER

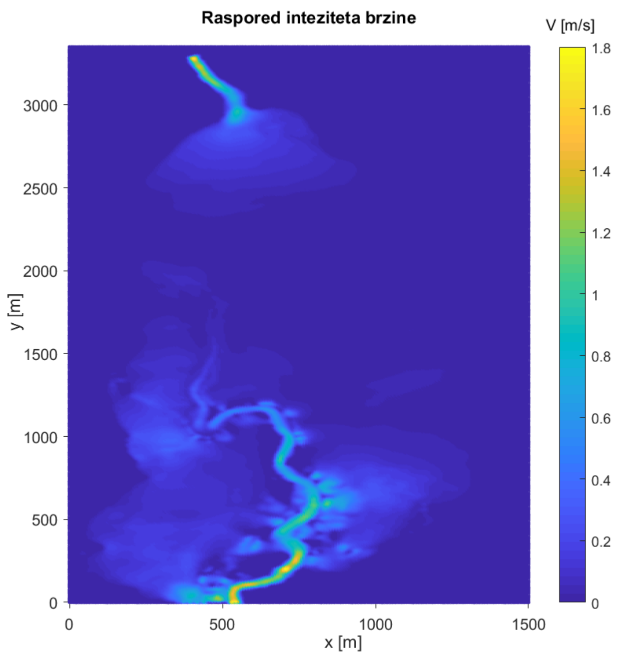
Ravanski model transporta testiran je na primeru Plavskog jezera (Crna Gora) [4] [15]. Prikazuju se preliminarni rezultati bez detaljne ocene korišćenog postupka. Dalji testovi su neophodni kako bi se dokazale određene prednosti korišćene metode.

Razmatra se ustaljeno tečenje i transport konzervativnog trasera pri protoku 100 m^3/s. Na uzvodnom kraju jezera, zadaje se promena koncentracije konzervativnog zagađivača (trasera). Promena je linearna, koncentracija poraste od 0 do 5 g/l za 5 sati i opada na početnu vrednost za 7 sati.

Prikazani su rezultati proračuna samo za jednu kombinaciju računskih parametara. Dakle, ovde se prikazuju prvi rezultati testiranja opisanog računskog postupka.

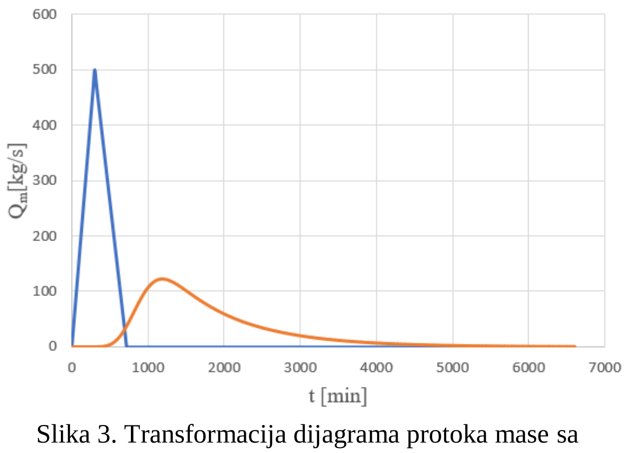
Hidrodinamika jezera ispitana je pomoću HECRAS 2D računskog modela [4] [15]. Prema ovom modelu jednačine matematičkog modela ravanskog strujanja se rešavaju pomoću metode konačnih zapremina [7]. Brzine i dubine se izračunaju u različitim tačkama u horizontalnoj ravni pa se opisani postupak za interpolaciju obavlja u tri „prolaza“ (po jedan za dubine i dva za dve komponente brzine).

Prosečno rastojanje između tačaka sa poznatim brzinama i dubinama iznosi oko 10 m, dok usvojeno rastojanje između tačaka računske mreže za proračun transporta trasera iznosi $\Delta x = 5\,\text{m}$. Vrednost širine uticaja za interpolaciju iznosi 24 m ($2h$) i usvojena je na osnovu prosečnog rastojanja tačaka sa poznatim dubinama odnosno brzinama ($h = 1{,}2 \cdot 10\,\text{m}$). Na slici 2 prikazan je rezultat interpolacije brzina.



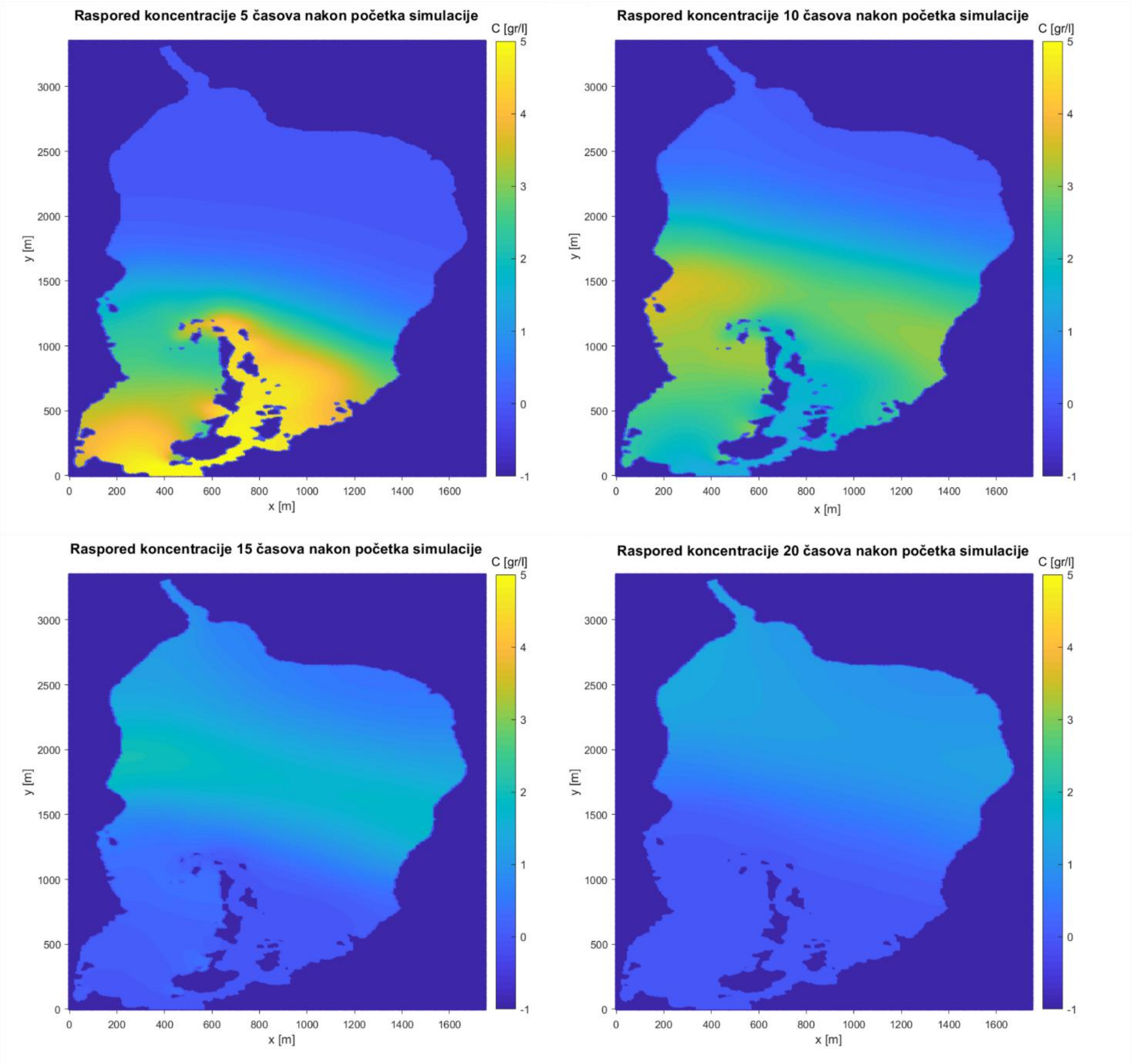
Slika 2. Interpolacijom dobijen raspored inteziteta brzine

U proračunu transporta, usvojena je vrednost koeficijenta disperzije $D = 5\,\text{m}^2/\text{s}$, dok je vrednost vremenskog računskog koraka $\Delta t = 2\,\text{s}$. Uzimajući kao merodavne, najveće vrednosti brzine, kao i druge usvojene vrednosti računskih parametara, zaključeno je da je ispunjen uslov stabilnosti (6).



Slika 3. Transformacija dijagrama protoka mase sa uzvodnog profila (plavo) ka nizvodnom profilu (narandžasto)

Na slici 3 prikazani su proračunom dobijeni „ulazni“ i „izlazni“ dijagrami promene protoka mase trasera, dok su na slici 4 prikazani rasporedi koncentracije za različita vremena u toku numeričke simulacije transporta. Integracijom dijagrama sa slike 3, dobija se ukupna masa zagađivača koja „ulazi“ odnosno „izlazi“ iz računskog domena. Nakon 110 časova, koncentracija u celom jezeru jednaka je početnoj vrednosti pa se eventualna razlika u ulaznoj i izlaznoj masi može okarakterisati kao numerička greška. U konkretnom primeru, ukupna masa zagađivača koja se ulila u jezero iznosi $10,8 \cdot 10^3$ t dok masa koja je otekla iz jezera iznosi $10,6 \cdot 10^3$ t što znači da relativna greška iznosi manje od 2%.



Slika 4. Rasporedi koncentracije zagađivača dobijeni u numeričkom proračunu u četiri različita vremenska trenutka nakon početka simulacije transporta

5. ZAKLJUČAK

Na primeru Plavskog jezera demonstrirana je metoda za proračun ravanskog transporta konzervativnog zagađivača u slučaju kada se unapred poznaju dubine i po dubini osrednjene brzine u nepravilno raspoređenim vertikalama toka. Za rešavanje jednačina transporta upotrebljena je eksplicitna metoda zasnovana na primeni konačnih razlika – metoda Du Fort - Frankel. Uz to je primenjena ekvidistantna računska mreža pa je za očekivati da bi se proračun ovom metodom putem računara mogao značajno ubrzati primenom više procesorskih jedinica (CPU ili GPU).

S obzirom da se proračun transporta obavlja korišćenjem ekvidistantne računske mreže, kako bi se dobile brzine i dubine u istim tačkama u kojima se računaju koncentracije, uspešno je upotrebljena metoda za interpolaciju zasnovana na upotrebi SPH interpolacije i primeni Tisenovih poligona. Predloženi metod je posebno interesantan jer omogućava primenu lokalne interpolacije višeg reda. Kako bi se pokazale eventualne prednosti predložene metode potrebno je izvršiti dodatna testiranja.

ZAHVALNOST

Autori se zahvaljuju Ministarstvu prosvete, nauke i tehnološkog razvoja na finansiranju projekata TR37009 i TR37010.

LITERATURA

[1] Grupa autora, Idejno rešenje kanalizacije potisno gravitacionog voda od lokacije PPOV Apatin do izliva u Dunav u Apatinu - Hidrološka studija, AD „Vojvodinaprojekt“ Novi Sad, 2017.

[2] Zindović, B., Jovanović, M., Kapor, R., Prodanović, D., Đorđević, D., Numerička simulacija strujnog polja u blizini vodozahvata, Vodoprivreda, 42(2010) 246-248, 2010.

[3] Zindović, B., Jovanović, M., Kapor, R., Prodanović, D., Đorđević, D., Oblikovanje ulaza u zaliv primenom modela ravanskog i prostornog tečenja, Vodoprivreda, Vol. 39, br. 1-3, 2007.

[4] Horvat, Z., Horvat, M., Two Dimensional Heavy Metal Transport Model for Natural Watercourses, River Research and Applications, 32(6), pp. 1327-1341, 2016.

[5] Grupa autora, Studija revitalizacije i zaštite Plavskog jezera, Institut za vodoprivredu „Jaroslav Černi“, 2018.

[6] Grupa autora, Tehnička dokumentacija za izgradnju regionalne deponije otpada Kalenić - Hidrološko-hidraulička studija, Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu, 2019.

[7] U.S.Army Corps of Engineers, HEC-RAS -River Analysis System, Hydraulic reference manual, V. 5.0, 2016.

[8] Monaghan, J.J., Simulating free surface flows with SPH, Journal of Computational Physics, Elsevier, Vol. 110, 1994.

[9] Rosić N., N. Savić, Lj., Đorđević, D., Rešavanje jednačina kretanja fluida metodom praćenja fluidnih delića (SPH METODA), Vodoprivreda, 46(2014) 267-272, 2014.

[10] Thiessen, A., Precipitation Averages for Large Areas, Monthly Weather Review, 39(7) 1082-1084, 1911.

[11] Du Fort, E., Frankel, S., Conditions in the Numerical Treatment of Parabolic Differential Equations, Mathematical Tables and Other Aids to Computation, Vol. 7, No. 43, pp.135-152, 1953.

[12] Hutomo, G. D., Kusuma, J., Ribal, A., Mahie, A. G., Aris, N., Numerical solution of 2-d advection-diffusion equation with variable coefficient using du-fort frankel method, Journal of Physics: Conference Series, Volume 1180, conference 1, 2019.

[13] Domínguez, J., Crespo, A., Gómez- Gesteira, M., Marongiu, J., Neighbour lists in smoothed particle hydrodynamics, International Journal for Numerical Methods in Fluids,Volume 67, Issue 12, 2010.

[14] Lorensen, W., Cline, H., Marching cubes: A high resolution 3D surface construction algorithm, ACM SIGGRAPH Computer Graphics, 21 (4): 163–169, 1987.

[15] Stošić, N., Modeliranje transporta materije u protočnom jezeru, Master rad, Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu, 2019.

NUMERICAL MODELLING OF TWO-DIMENSIONAL POLUTANT TRANSPORT, TEST RESULTS

by

Nikola ROSIĆ, Anja RANĐELOVIĆ
Faculty of Civil Engineering, Belgrade
Nikola STOŠIĆ
Institute for the development of water resources „Jaroslav Černi“, Belgrade

Summary

This paper presents an explicit numerical method for simulation of two-dimensional polutant transport. The proposed method includes application of finite difference aproximations on rectangular meshes. Additionally, this paper presents a method for interpolation of the velocity field from computed or measured data at randomly distributed points. The interpolation method is based on SPH (Smoothed Particle Hydrodynamics) and requires construction of Thiessen polygons to discretize computational domain. One test case is created by computing 2D transport of conservative pollutant along Lake Plav. Preliminary results are promising but further evaluation is needed to demonstrate the advantages of the proposed method.

Key words: 2D Pollutant transport, Interpolation theory, SPH, HECRAS 2D

Redigovano 28.10.2019.