

## PARAMETRI DIFUZIONIH MODELA ZA NEKE VODOTOKE U BOSNI I HERCEGOVINI DIO II: TERENSKA ISTRAŽIVANJA NA RIJEKAMA U BIH I ODREĐIVANJE PARAMETARA DIFUZIONIH MODELA

Haša BAJRAKTAREVIĆ- DOBRAN  
Građevinski fakultet u Sarajevu

### REZIME

Detalniji rezime cijelog članka (oba dijela) prikazan je u njegovom prvom dijelu, u prošlom broju, koji se odnosi na teoretski dio istraživanja difuzionih i disperzionih procesa u prirodnim vodotocima. U ovom (drugom) dijelu su prikazani rezultati terenskih istraživanja na tri vodotoka u BiH (Miljacka, Bosna i Vrbas), uz određivanje odgovarajućih parametara difuzionih modela. Mjerenja te vrste su vrlo rijetka i u svijetu, pa su dobijeni rezultati od šireg značaja, jer omogućavaju izvođenje zaključaka o mogućnosti primjene određenih matematičkih modela turbulentnih difuziono-diserzionih procesa u rijekama.

**Ključne riječi:** otvoreni vodotoci, terenska istraživanja, poprečno miješanje, uzdužna diperzija, rijeke Miljacka, Bosna i Vrbas

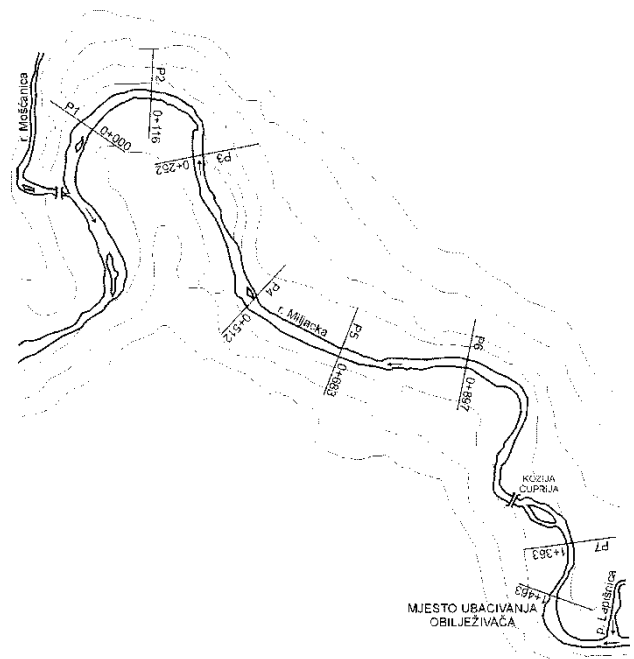
### 3. TERENSKA ISTRAŽIVANJA U BIH I PRIKAZ DOBIJENIH REZULTATA

#### 3.1. RIJEKA MILJACKA

##### 3.1.1. Osnovni podaci

Na jednoj dionici dužine 1.463 m brdskog vodotoka Miljacke terenska istraživanja obavljena su 16-VII-1977. godine (sl. 2) [20, 3]. Obilježavanje je izvršeno otopinom natrijeva bikromata (koncentracija 200 mg/l), u vidu poprečnog linijskog izvora, u periodu od 30 sekundi. Prethodno obilježavanje izvršeno je otopinom fluoresceina. Prolazak obilježenog oblaka praćen je, pomoću krivih vrijeme – koncentracija, na nizvodnim profilima P6, P4, P3 i P1.

Istog dana izvršeno je, na svim poprečnim profilima, mjerenje geometrije, brzina u vertikalama i razmaka između profila. Eksperiment je obavljen pri stacionarnim uslovima toka. Korito rijeke čine šljunak i mjestimično veće kamenje – samci (tabela 2).



Slika 2. Posmatrana dionica rijeke Miljacke sa ucrtanim mjernim profilima

Tabela 2. Hidrometrijski podaci, za posmatranu dionicurijeke Miljacke

Profil	Odstojanje niz tok (m)	Širina b (m)	Srednja dubina $h_{sr}$ (m)	Srednja brzina $\tilde{u}_1$ (m/s)	Proticaj Q ( $m^3/s$ )	Pad S (‰)	Brzina smicanja $U_*$ (m/s)
1	2	3	4	5	6	7	8
Mjesto ubacivanja	0				1,0		
P7	100	8,6	0,30	0,37	1,0	1,53	0,066
P6	566	11,5	0,21	0,43	1,0	1,12	0,047
P5	780	12,5	0,22	0,36	1,0	0,82	0,043
P4	951	13,5	0,28	0,33	1,0	0,49	0,034
P3	1211	10,5	0,31	0,33	1,0	1,24	0,060
P2	1347	9,5	0,25	0,42	1,0	2,67	0,079
P1	1463	11,6	0,30	0,28	1,0	0,71	0,046

### 3.1.2. Određivanje koeficijenta uzdužne – jednodimenzionalneturbulentne disperzije

U tabeli 3. dati su koeficijenti uzdužne disperzije određeni po jednačinama (9) i (13) [20, 3]. Odgovarajuće bezdimenzionalno vrijeme omogućuje dobijanje pouzdanih rezultata.

Predviđeni koeficijenti disperzije (stubac 3. tabele 3), uz korištenje  $D_{t-D_{2uk}}/hU_* = 0,23$  određeni su sa odgovarajućom tačnošću (uporediti stupce 3. i 4). Na ovaj način, pokazano je da za ovu vrstu brdskih i jako neuniformnih vodotoka, relativno plitkih i uskih, direktna upotreba jednačine (9) daje za praksu zadovoljavajuće rezultate.

Naknadno [7, 4], pri izradi osnovnog programa DISPER, za proračun uzdužne disperzije na jednom potezu vodotoka, korišteni su eksperimentalni podaci rijeke Miljacke [20, 3]. Rezultati numeričkog proračuna za poteze P4-P6 i P1-P6 (kao ulazna koncentracija za poteze poslužila je koncentracija mjerena na P6,

odgovarajući koeficijent  $D_D$  usvojeni su prema stupcu 4. tabele 3 – 2,82  $m^2/s$  i 3,34  $m^2/s$ ), upoređeni su sa mjernim podacima, posredstvom krivih vrijeme – koncentracija za nizvodne profile P4 i P1. Utvrđeno je odlično slaganje mjerenih i numeričkih krivih. Ovo je potvrdilo valjanost usvojene numeričke šeme, provedenog proračuna pomoću nje i prethodnog određivanja koeficijenta disperzije.

### 3.1.3. Analiza koeficijenta poprečnog miješanja

Premda je jednačina (5), dobijena za Elderov uniformni tok, odgovarajuća relativno uniformnim i pravim prirodnim vodotocima [1, 14, 34, 35], pokazano je da ona odgovara i prirodnim neuniformnim, relativno užim i plićim, zakrivljenim vodotocima [2, 36, 31, 20, 3]. Odgovarajućom provjerom, preporučenom od strane Fischera [31], usvojenog bezdimenzionalnog koeficijenta (stubac 2. tabela 3) pokazano je da sekundarni tok nije interesantan [7]. Može se reći da u toku preovlađuje turbulentna difuzija  $D_{t-D_{2uk}} \rightarrow \bar{D}_{t_2}$ .

Tabela 3. Određivanje koeficijenata uzdužne disperzije rijeke Miljacke [20, 3]

Potez	Direktna upotreba jednačine (9)		Osmotreni koef. disperzije, integraciona procedura po jed. (13) $D_D(m^2/s)$	Bezdimenzionalno vrijeme $t' = t/T_L$
	Preporučeni bezd. koef. popr. miješanja $D_{t-D_{2uk}}/hU_*$	Predviđeni koeficijent disperzije $D_D(m^2/s)$		
1	2	3	4	5
P1-P6	0,23	10,41	2,82	16,30 – 12,66
P6-ubac.	0,23	1,24	-	12,60 – 0,00
P1-P3	0,23	10,32	3,36	16,30 – 15,35
P3-P4	0,23	6,10	1,32	15,35 – 13,90
P4-P6	0,23	-	3,34	13,90 – 12,66

Jasno je da u ovom plitkom vodotoku, datih karakteristika (tabela 2. i sl. 2), nisu moguće sekundarne struje i pored naizmjenične krivudavosti toka. Zbog stalnog naizmjeničnog krivudanja, uticaj postojeće poprečne brzine može da se osrednji na dosta kratkim potezima.

Na taj način, pokazano je da za uske i plitke krivudave prirodne vodotoke (sl. 2, tabela 2) direktna upotreba jednačine (9) odgovara za praktične potrebe (stupci 2. i 3. tabele 3). Čini se da eksperimentalno određivanje  $D_{t-D_{2uk}}$ , mada tačnije od preporučene jednačine (5), ne bi imalo opravdanje sa ekonomskog i vremenskog stanovišta.

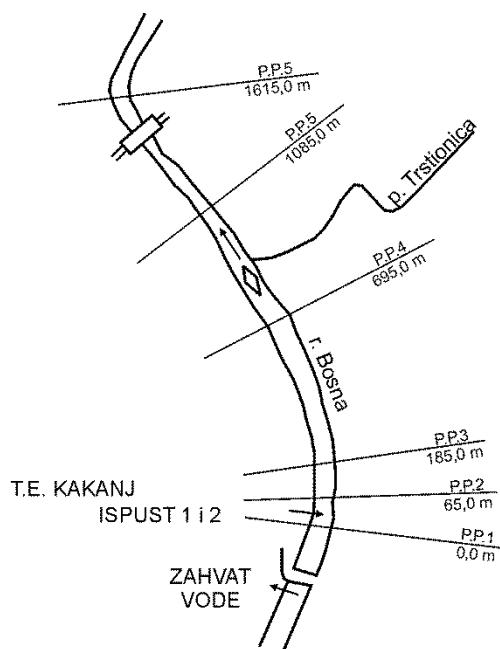
### 3.2. RIJEKA BOSNA

#### 3.2.1. Osnovni podaci

Terenska istraživanja su obavljena na ispuštima toplih otpadnih voda TE „Kakanj“ (ispust 1 – rashladne otpadne vode; ispust 2 – 13,5 m nizvodnije, otpadne vode od hlađenja šljake) i pripadajućoj dionici rijeke Bosne (sl. 3). Rad ispusta je stacionaran pri normalnom radu postrojenja (proticaj, temperatura) [38, 7].

Poprečni profil PP1 smješten je 35 m uzvodno od ispusta 1. Zbog bezbjednosti, PP2 je smješten 30 m nizvodno od ispusta 1. Potez PP5-PP6 nalazi se pod uticajem ispusta 1. i 2. kao i potoka Trstionice.

Korito rijeke Bosne čine krupni šljunkovi i, mjestimično, krupnije kamenje – samci, što ukazuje na značajnu hrapavost riječnog dna. Osnovna mjerenja izvršena su 22-IX-1981. godine (stacionarni uslovi toka rijeke i režima rada ispusta).



Slika3. Posmatrana dionica rijeke Bosne

Temperature vode ispusta 1. i 2. iznosile su:  $T_1 = 30,55$  °C i  $T_2 = 33,97$  °C. Proticaji i brzine bile su:  $Q_1 = 7,06$  m<sup>3</sup>/s,  $Q_2 = 0,54$  m<sup>3</sup>/s,  $v_1 = 6,3$  m/s i  $v_2 = 4,5$  m/s.

Podaci za rijeku Bosnu i potok Trstionica dati su u tabeli 4. Profil PP1 omogućuje uvid u ulaznu veličinu temperature,  $T_{PP1} = 16,7$  °C. Temperatura vode potoka Trstionica (ušće) iznosila je  $T_T = 17,8$  °C.

Profil PP3 se nalazi u zoni izjednačavanja temperature duž poprečnog presjeka, nakon prethodno ostvarenog potpunog vertikalnog miješanja i dosezanja

Tabela 4. Hidrometrijski podaci, PP1 – PP6 rijeke Bosne i potok Trstionica neposredno prije ušća

Profil	Odstojanje niz tok (m)	Širina b(m)	Srednja dubina $h_{sr}$ (m)	Srednja brzina $\tilde{u}_1$ (m/s)	Proticaj $Q$ (m <sup>3</sup> /s)	Pad S(‰)	Brzina smicanja $U_*$ (m/s)
1	2	3	4	5	6	7	8
PP1	0	42,0	0,76	0,41	13,2	0,65	0,070
PP2	65	39,0	0,67	0,80	20,8	4,37	0,169
PP3	185	40,0	1,14	0,46	20,8	1,03	0,108
PP4	695	76,0	0,53	0,52	20,8	0,78	0,064
PP5	1085	50,0	0,65	0,66	21,6	0,78	0,070
PP6	1615	37,0	0,79	0,74	21,6	0,70	0,074
Trstionica	Prije ušća u r. Bosnu	8,5	0,25	0,38	0,80	-	-

temperaturnog uticaja do desne obale rijeke Bosne, bez uticaja mlaza na profil brzina. Pronos toplote preko površine vode je beznačajan, pošto se radi o kratkim potezima. PP4 je blizak zoni potpunog miješanja.

PP5 se nalazi pod uticajem hladnije vode potoka Trstionica (preko polovine poprečnog presjeka), u području potpunog vertikalnog miješanja. Na PP6, nakon doseganja temperaturnog uticaja do lijeve obale, postiže se dalje izjednačavanje temperatura po poprečnom presjeku.

Zbog veličine toplotnih ispusta, brdskog karaktera vodotoka i skoro zanemarljivog protezanja bliskog polja, može se zaključiti da je opravdano posmatrati rasprostiranje toplote preko dvodimenzionalnog, po dubini osrednjenog, difuznog modela (jednačina (2), odnosno (3)). Pri tome, može se posmatrati zbirni uticaj ispusta 1. i 2. U posmatranom području topla voda se ponaša kao obilježivač.

### 3.2.2. Određivanje koeficijenta poprečnog miješanja

Prije bilo kakvog korištenja mjernih krivih poprečni razmak – temperatura, provjerena je pouzdanost krivih. Utvrđeno je veoma dobro slaganje integrisanog relativnog toplotnog fluksa (povećanje/smanjenje temperature ( $\Delta T^{\circ}\text{C}$ ) iznad/ispod temperature neporemećene rijeke ( $\Delta T^{\circ}\text{C} = 0$ )) za pojedine poprečne profile sa ispuštenim količinama toplote (razlike 1% – 6%, izuzev PP4 – 15%) [38].

Na raspoložive podatke mjerenja primijenjena je izabrana GCM metoda (jednačina (16)). Potrebne

varijanse za posmatrane poteze rijeke Bosne kao i dobijene veličine koeficijenata poprečnog miješanja date su u tabeli 5. Detalji cjelokupnog postupka dati su u radu [39].

Terenski uslovi, obilježeni položajem ispusta i pritoke, nisu omogućili obuhvatanje bar dvije krivine. Budući da nije vršeno ubacivanje obilježivača sa dvije suprotne obale, ne može se primijeniti način kao na sl. 1. Međutim, izloženi eksperiment analogan je trećem, uspješno korištenom, eksperimentalnom primjeru prethodnog rada [15].

U prvom dijelu dionice rijeke Bosne posmatrani su profili PP3 i PP4 te ispusni profil (sl. 1, tabela 5). Sva tri pokušaja određivanja koeficijenata poprečnog miješanja dala su veoma bliske rezultate. Ovako dobro slaganje nije ostvareno ni kod trećeg eksperimentalnog primjera u prethodnom radu [15], gdje topla otpadna voda zaprema samo 80% širine rijeke i gdje se, ipak, sa velikom vjerovatnoćom pretpostavlja da je nađena stvarna prosječna vrijednost koeficijenta.

Nakon izbacivanja PP2 (uticaji količine kretanja ispusnog mlaza – tabela 4. i poprečne brzine usljed krivine), rasprostrti obilježivač po cijelom poprečnom presjeku simulira ubacivanje sa dvije obale, pošto se podjednako vrši rasprostiranje obilježivača od jedne obale do druge i obratno (odbijanje obilježivača od obale i ponovno miješanje). Postoji velika vjerovatnoća da su ovakvim osrednjenjem uklonjeni mogući uticaji čiste poprečne brzine i da su dobijeni podaci za difuzione vidove mehanizma toka.

Tabela 5. Rezultati analize promjene momenata za ispust – PP4 i pritoka – PP6

Potez	Dužina poteza (m)	Varijanse $\sigma_{f,x_2}^2$ ; $f = h\bar{u}_1 \Delta T$		Koeficijent poprečnog miješanja $D_{t-D_{2uk}}$ ( $\text{m}^2/\text{s}$ )	Uobičajeni bezdimenzionalni koeficijent $\alpha_{t-D_{2uk}}$
		Uzvodna ( $\text{m}^2$ )	Nizvodna ( $\text{m}^2$ )		
1	2	3	4	5	6
PP3 – PP4	510	582,83	2299,98	0,826	11,56
Ispust – PP3-PP4	660	0	2380,00	1,010	11,40
Ispust – PP4	660	0	2299,98	0,975	11,01
PP5 – PP6	530	481,31	590,112	0,072	1,39
Ušće potoka – PP6	730	0	590,112	0,283	5,46

Čini se da najtačnije podatke za koeficijent poprečnog miješanja daje pravac PP3-PP4 (nema uticaja količine kretanja mlaza ni početnog perioda miješanja – kratkih difuzionih vremena;  $D_{t-D_{2uk}} = 0,826 \text{ m}^2/\text{s}$ ). S obzirom na dužinu poteza te vrijednost bezdimenzionalnog koeficijenta veoma blisku prosjeku i vrijednosti za PP3-PP4 usvojeno je da u nastavku podaci pravca ispust-PP3-PP4 predstavljaju potrebnu osrednjenu bezdimenzionalnu veličinu (tabela 5, stubac 6;  $\alpha_{t-D_{2uk}} = 11,4$ ). Turbulentne karakteristike brdskog vodotoka i sekundarne struje uzrokuju pojavu velike vrijednosti bezdimenzionalnog koeficijenta poprečnog miješanja.

Slična analiza promjene momenata provedena je i za potez ušće potoka-PP6 (sl. 3, tabele 4. i 5). Izgled riječnog korita ovog poteza sličan je izgledu uzvodnog poteza, ali nema riječnih gazova. I pored manjka raspoloživih podataka za ovaj potez, mogu se dati približne vrijednosti koeficijenta miješanja.

Na PP6 voda potoka tek je uspjela da dotakne suprotnu obalu. PP5, vjerovatno utican ulivnim mlazom potoka, trebalo bi izbaciti iz razmatranja.

Pokušavajući naći prosječnu liniju promjene varijanse duž toka, koristeći tačku ušća i PP6, dobijeni su  $D_{t-D_{2uk}} = 0,283 \text{ m}^2/\text{s}$  i  $\alpha_{t-D_{2uk}} = 5,46$  [39, 38]. Može se zaključiti da ovaj koeficijent uključuje i uticaj čiste poprečne brzine, ali ne u značajnom obimu, usljed krivine na potezu most-PP6.

Isto tako, izvršena je gruba provjera osrednjenog difuzno – disperzionog koeficijenta za potez PP3-PP4 [39]. Provjera je izvršena pomoću analitičkog modela Šestakova [40], praktičnog za inženjersku ocjenu

stacionarnog procesa rasprostiranja, koji uz neka dopuštena usvajanja odražava bitne osobine posmatrane pojave. Nakon upoređenja proračunatih i terenski osmotrenih veličina, zaključeno je da je određeni  $D_{t-D_{2uk}} = 0,826 \text{ m}^2/\text{s}$  dovoljno valjan.

Može se zaključiti da brdski vodotoci ovog tipa – značajne turbulentnosti – imaju daleko veće bezdimenzionalne koeficijente poprečnog miješanja, nego pravi i uniformni vodotoci. Kod njih je opravdano posmatranje združenog uticaja ( $\alpha_{t-D_{2uk}}, D_{t-D_{2uk}} = 0,826 \text{ m}^2/\text{s}$ ), mada je vjerovatnije da disperzija ima prvenstvo nad difuzijom.

### 3.2.3. Određivanje koeficijenta uzdužne – jednodimenzionalne turbulentne disperzije

Na podatke hidrometrijskih mjerenja za poprečne presjeke PP1, PP3, PP4, PP5 i PP6 primjenjena je jednačina (9) [7, 39]. Izostavljen je PP2 i upotrijebljeni su bezdimenzionalni koeficijenti poprečnog miješanja, predstavljeni u stubcima 2. i 4. tabele 6.

Predstavljeni presječni koeficijenti u stupcu 5. tabele 6 ( $3,07 \text{ m}^2/\text{s}$  i  $8,12 \text{ m}^2/\text{s}$ ), za posmatrane poteze rijeke Bosne, su nešto veći od eksperimentalno dobijenog koeficijenta za rijeku Miljacku ( $2,82 \text{ m}^2/\text{s}$ , stubac 4. tabele 3), ali su istog reda veličine do oko  $10 \text{ m}^2/\text{s}$ . Oba vodotoka su brdskog karaktera, ali donekle različite veličine te se je ovo moglo i očekivati. Daleko veće vrijednosti koeficijenta  $D_D$  u stupcu 3. tabele 6, reda veličine  $100 \text{ m}^2/\text{s}$ , nisu u skladu sa veličinom i vrstom vodotoka [2, 36, 31]. Upotreba stvarno mjerenih veličina u jednačini (9) daje, čini se, bolje rezultate.

Tabela 6. Određivanje koeficijenata uzdužne disperzije rijeke Bosne

Profil, Potez	Direktna upotreba jednačine (9)		Upotreba jednačine (9) uz korištenje mjernih podataka	
	Preporučeni bezd. koef. popr. miješ. $D_{t-D_{2uk}}/hU_*$	Predviđeni koeficijent disperzije $D_D(\text{m}^2/\text{s})$	Osmotreni bezd. koef. popr. miješ. $D_{t-D_{2uk}}/hU_*$	Predviđeni koeficijent disperzije $D_D(\text{m}^2/\text{s})$
1	2	3	4	5
PP1	0,23	81,72	11,40	1,54
PP3	0,23	67,01	11,40	1,45
PP4	0,23	263,53	11,40	4,69
PP3-PP4	0,23	165,27	11,40	3,07
PP5	0,23	59,49	5,46	2,51
PP6	0,23	326,12	5,46	13,74
PP5-PP6	0,23	192,80	5,46	8,12

U tabeli 6 pokazano je da Elderov koeficijent (stubac 2), dat jednačinom (9), nije odgovarajući za ovaj vodotok. Mada odgovarajuća za dobar dio prirodnih vodotoka [2, 3, 36, 31], svrstanih u manje – relativno uske i plitke – vodotoke, direktna upotreba jednačine (9) ne važi za veće – relativno dublje i šire – zakrivljene vodotoke u kojima su dominantne sekundarne serije prve i druge vrste. Prema tome, na rijeku Bosnu se odnose raspoloživa saznanja stečena posmatranjem većih vodotoka [31].

S obzirom na čvrstu teorijsku podlogu jednačine(9), postaje jasno da za relativno veće i dublje vodotoke treba upotrijebiti stvarno mjereni koeficijent  $D_{t-D_{2uk}}$ . Najtačnija vrijednost koeficijenta  $D_D$ , kako je već poznato, dobila bi se upotrebom integracione procedure (jednačina (13)).

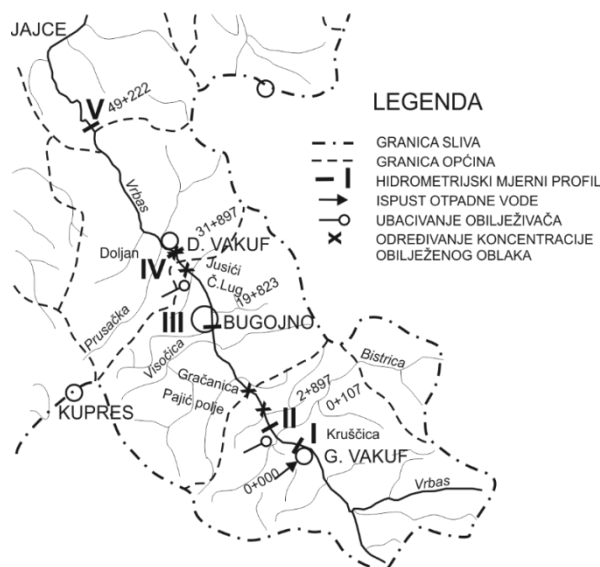
### 3.3. RIJEKA VRBAS

#### 3.3.1. Osnovni podaci

Na izabranoj dionici rijeke Vrbas (sl. 4), uključivši ušće dvaju pritoka, izvršena su hidrometrijska mjerenja pri stabilnim hidrometrijskim uslovima (tabela 7). Obradene serije mjerenja (I i II) odgovaraju malim i srednjim vodama [41, 4].

Na osnovu prethodnih studijskih radova, izabrana su dva obilježivača poteza: prvi potez – 8.400 m (između profila II i III) i drugi – 6.700 m (između III i IV).

Obilježavanje je obavljeno 22 – 24-X-1985. godine, potrebnim količinama odgovarajuće otopine uranina. Krive vrijeme – koncentracija posmatrane su na profilima P1 i P2 (kod mosta u Pajić polju i Gračanici) te na profilima P3 i P4 (kod mosta u Jusićima i kod V.S. Doljan). Premda je obilježavanje obavljeno oko jedan mjesec nakon I serije hidrometrijskih mjerenja, ipak je hidrološka situacija na rijeci Vrbas bila gotovo istovjetna (sl. 4).



Slika 4. Prikaz rijeke Vrbas (G. Vakuf – Torlakovac), izabranih hidrometrijskih profila i ostalih mjernih mjesta

Tabela 7. Hidrometrijska mjerenja

Seriya	Profil	Rijeka	Datum	Proticaj $Q(m^3/s)$	Širina $b(m)$	Srednja dubina $h_{sr}(m)$	Srednja brzina $\tilde{u}_1 (m/s)$	Pad $S$	Brzina smicanja $U_s(m/s)$
1	2	3	4	5	6	7	8	7	8
I	I	Vrbas	17.IX 1985	0,646	9,50	0,19	0,36	0,00440	0,0906
	Ušće	Bistrica	18.IX 1985	0,883	6,50	0,24	0,57	-	-
	II	Vrbas	"	1,86	13,50	0,43	0,32	0,00352	0,1218
	III	Vrbas	"	3,45	12,50	0,49	0,56	0,00189	0,0953
	Ušće	Veseočica	"	1,09	10,5	0,16	0,65	-	-
II	IV	Vrbas	19.IX 1985	5,08	18,50	0,76	0,36	0,00044	0,0573
	V	Vrbas	20.IX 1985	8,23	23,00	0,69	0,52	0,00160	0,1041
	I	Vrbas	10.XII 1985	2,02	10,50	0,27	0,71	0,00440	0,1079
	Ušće	Bistrica	"	1,98	6,50	0,32	0,96	-	-
	II	Vrbas	11.XII 1985	5,91	15,00	0,55	0,72	0,00444	0,1548
II	III	Vrbas	"	9,57	14,00	0,61	1,12	0,00156	0,0966
	Ušće	Veseočica	"	2,84	10,00	0,29	0,99	-	-
	IV	Vrbas	12.XII 1985	15,80	18,00	1,09	0,80	0,00099	0,1029
	V	Vrbas	13.XII 1985	18,40	23,00	0,82	0,97	0,00244	0,1401

### 3.3.2. Određivanje koeficijenta uzdužne – jednodimenzionalne turbulentne disperzije

Na osnovu raspoloživih podataka, direktne upotrebe jednačine (9) i izrađenog podprograma „D“ izvršeno je numeričko računanje koeficijenta uzdužne turbulentne

disperzije. Rezultat proračuna dati su u tabeli 8 [41, 4]. Izuzetno za profil III kod II serije mjerenja, upotrebom Elderovog izraza za  $D_{t_2}$  dobijena je negativna vrijednost koeficijenta  $D_D$  što ne odgovara prirodi procesa disperzije u ustaljenom toku.

Tabela 8. Koeficijenti uzdužne disperzije, određeni na osnovu uobičajeno mjerenih veličina toka [41, 42]

Profil	I SERIJA		II SERIJA	
	$D_D$ ( $m^2/s$ )	Odnos širine/dubine $b/d_{sr}$	$D_D$ ( $m^2/s$ )	Odnos širine/dubine $b/d_{sr}$
I	2,58	50	7,80	39
II	1,77	31	1,82	27
III	9,93	25	-	23
IV	24,3	24	43,05	16
V	8,66	33	39,90	28

Zbog izrazite varijacije brzine u središnjem dijelu poprečnog profila III, javljaju se daleko veći koeficijenti poprečnog miješanja. Prema tome, trebalo bi uzeti u obzir difuziono – disperzioni koeficijent,  $D_{t-D_{2uk}}$ , koji se određuje eksperimentalno.

Za krive vrijeme – koncentracija određene su odgovarajuće statističke veličine. Upoređenjem ukupne protekle količine obilježivača kroz mjerne profile i odgovarajuće količine ubačenog obilježivača u svaki obilježivački potez, utvrđeno je da su razlike u dozvoljenim granicama (P1 i P2: – 2,6% i – 5,62%; P3 i P4: + 7,0% i + 4,6%; poželjno do 5%, a ponekad i do 15%, što traži dodatna obrazloženja).

Integracionom metodom prema jednačini (13) i pomoću podprograma „RUTINGD“ [4, 42], izvršena je provjera prvobitno dobijenih koeficijenata  $D_D$  pomoću uobičajeno mjerenih veličina toka. Potrebne početne vrijednosti koeficijenata  $D_D$ , za poteze P1-P2 i P3-P4, predstavljale su prosječne vrijednosti koeficijenta za profile II i III te III i IV, za I seriju mjerenja (tabela 8).

Rezultati integracione procedure, za posmatrane poteze, predstavljeni su u tabeli 9. Lagrangeova integralna vremenska skala određena je po jednačini (10), na osnovu prosječnih veličina za date poteze. Zbog malog broja hidrometrijskih profila na obilježivačkim potezima (po 2) nije se moglo primijeniti poboljšana metoda za dobijanje  $T_L$  [3, 22, 39].

Tabela 9. Koeficijenti uzdužne disperzije dobiveni integracionom procedurom [41, 4]

Hidro-metrijski i obilježivački profili	Karakteristična dužina I (m)	Vremenska skala $T_L$ (s)	Dužinska skala L (m)	Bezdimenzionalno vrijemeza mjerene krive $t'$	Srednje vrijeme prolaza nizvodne teorijske krive $\bar{t}_n$ (s)	Varijansa nizvodne teorijske krive $\sigma_{t_n}^2$ ( $s^2$ )	Koeficijent disperzije dobijen integracionom procedurom $D_D$ ( $m^2/s$ )
II	8,0	384,5	969,0	-	-	-	-
P1				30,7	-	-	8,15
P2				57,8	22.224,4	4.035.725,7	-
III	9,75	598,0	1686,4	-	-	-	13,21
P3				14,6	-	-	-
P4				26,7	15.968,0	3.086.537,7	-
V				-	-	-	-

Pomoću programa „INCID“ (proračun uzdužne disperzije na jednoj dionici vodotoka, sastavljenoj od više poteza, oslanjajući se na osnovni program „DISPER“ za jedan potez) izvršen je proračun, rasprostiranja obilježivača na potezu P3-P4 [41, 4, 42]. Kao ulazna koncentracija poslužila je obilježivačka kriva vrijeme – koncentracija mjerena na profilu P3. Za provjeru numeričkog proračuna, kao i upotrijebljenog koeficijenta  $D_D = 13,21 \text{ m}^2/\text{s}$  (tabela 9), poslužila je mjerena kriva vrijeme – koncentracija na nizvodnom profilu P4. Pokazano je veoma dobro slaganje mjerene i numeričke krive (razlika između maksimalnih vrijednosti koncentracije krivih iznosila je  $\approx 2,7\%$ ), što potvrđuje valjanost usvojene numeričke šeme, provedenog proračuna i određivanja koeficijenta disperzije. Znajući da korišteni koeficijent  $D_D$  sadrži moguću grešku  $\pm 2,5\%$ , vidi se pouzdanost numeričkog proračuna i korištenih veličina.

Pregled dobijenih rezultata za rijeku Vrbas, sadržanih u tabelama 8 i 9, dat je u tabeli 10. Vidi se da su

koeficijenti  $D_D$  predviđeni preko parametara toka sa greškom do 30% (serija I). Prema tome, može se zaključiti da su karakteristični profili za posmatrane poteze (I – IV) veoma dobro izabrani, a dobijeni koeficijenti  $D_D$  mogu veoma dobro poslužiti za praktičnu upotrebu.

Serija II – srednje vode predstavljena je samo predviđenim koeficijentima preko parametara toka. S obzirom na postignut odnos širina/dužina  $> 10$  (jednačina (9)), može se zaključiti da su i ovi koeficijenti predviđeni u granicama očekivane tačnosti.

Tokom istraživanja, vezanih za rijeku Vrbas, uočeno je da se jednačine jednodimenzionalne disperzije dobro primjenjuju i na prav i na zakrivljen vodotok, budući da kao jednodimenzionalne važe i za Descartesov i za prirodni koordinatni sistem. I sam način eksperimentalnog dobijanja koeficijenta uzdužne disperzije (jednačina (13)) je u suglasnost sa prirodnim koordinatnim sistemom [41, 4].

Tabela 10. Pregled dobijenih rezultata [41, 4, 42]

Hidrometrijski i obilježivački profili	I SERIJA			II SERIJA
	Predviđeni koeficijenti preko parametara toka $D_D$ ( $\text{m}^2/\text{s}$ )	Koeficijenti određeni integracionom procedurom $D_D$ ( $\text{m}^2/\text{s}$ )	Greška predviđanja koeficijenta $D_D$ preko parametara toka %	Predviđeni koeficijent preko parametara toka $D_D$ ( $\text{m}^2/\text{s}$ )
I	2,58	-		7,80
Usvojeno za potez	2,58	-		7,80
II	1,77			1,82
P1	-	×		-
P2	-	×		-
III	9,93			
Prosjek za potez	5,85	8,15	28,2	-
Usvojeno za potez	-	8,15	-	-
III	9,93			-
P3	-	×		-
P4	-	×		-
IV	24,33			43,05
Prosjek za potez	17,13	13,21	29,7	-
Usvojeno za potez	-	13,21	-	-
V	8,66	-		39,90
Usvojeno za potez	8,66	-	-	39,90

×- pokazuje profile na kojima je izvršeno ispitivanje obilježivača i za koje je provedena integraciona procedura



#### 4. DISKUSIJA I ZAKLJUČNA RAZMATRANJA

Skupni pregled rezultata istraživanja pomenutih vodotoka dat je u tabeli 11. Bezdimenzionalni koeficijenti dosta variraju, zavisno od vodotoka i posmatranog poteza, te jedanput određeni ne mogu da važe za svaki prirodni vodotok i sve njegove dionice.

Može se reći da se rijeka Miljcka ponaša u skladu sa datim pretpostavkama [31], za manje – uske (do 70 m širine) i krivudave prirodne vodotoke. Direktnom upotrebom jednačine (9) [2, 37, 32, 3], uz  $D_{t-D_{2uk}}/hU_* = 0,23$ , predviđeni koeficijenti uzdužne disperzije nalaze se u okviru tačnosti ove metode (stupci

5. i 6. tabele 11). Ovim se potvrđuju Fischerova opažanja da, zbog nemogućnosti razvijanja sekundarnih struja, u ovakvim vodotocima preovlađuje turbulentna difuzija, tj.  $\alpha_{t-D_{2uk}} \rightarrow \alpha_{t_2}$  [36, 31]. Studijom rasprostiranja obilježivača, duž krivudava vodotoka, vrši se osrednjavanje svih uticaja koji postoje duž posmatrane dionice ili poteza te se dobija stvarni iznos uzdužne disperzije (stubac 6. tabela 11).

Posmatrajući rijeku Bosnu (tabele 1. i 11), vidljivo je da se radi o relativno većem vodotoku (širine od 37 do 76 m) koji se nalazi na prelazu od malih ka većim vodotocima [31]. Ovo je očito jer se javljaju daleko veći

Tabela 11. Skupni pregled rezultata istraživanja

Potez	Koeficijent poprečnog miješanja $D_{t-D_{2uk}}$ ( $m^2/s$ )		Bezdimenzionalni koeficijent $\frac{D_{t-D_{2uk}}}{hU_*}$	Koeficijent disperzije $D_D$ ( $m^2/s$ )		Bezdimenzionalni koeficijent $\frac{D_D}{hU_*}$	Odnos širine prema dubini $\frac{b}{h}$
	Predviđen	Osmotren		Predviđen	Osmotren		
1	2	3	4	5	6	7	8
<b>MILJACKA</b>							
P1-P6	0,0036		0,23	10,41	2,82	180	39,59
P6-ubac	0,0045		0,23	1,24	-	63	28,67
P1-P3	0,0041		0,23	10,32	3,36	187	36,31
P3-P4	0,0033		0,23	6,10	1,32	91	40,68
P4-P6	-		0,23	-	3,34	-	-
<b>BOSNA</b>							
PP3-PP4		1,010	11,40	3,07	-	43	69,88
PP5-PP6		0,283	5,46	8,12	-	157	60,42
<b>VRBAS (I SERIJA)</b>							
I			0,23	2,58			50,00
II-III			0,23	5,85	8,15		28,00
III-IV			0,23	17,13	13,21		24,50
V			0,23	8,66			33,00
<b>VRBAS (II SERIJA)</b>							
I			0,23	7,8			
II			0,23	1,82			
III			0,23	-			
IV			0,23	43,05			
V			0,23	39,90			

bezdimezionalni koeficijenti poprečnog miješanja od Elderovog (stupci 3. i 4. tabele 11). U ovako zakrivljenom vodotoku dominantna su sekundarna strujanja – sekundarne struje prve i druge vrste – koja mnogo povećavaju poprečnu disperziju. Upotrebom osmotrenih – stvarnih bezdimezionalnih koeficijenata poprečnog miješanja u jednačini (9), omogućava se dobijanje valjanih vrijednosti koeficijenta uzdužne disperzije rijeke Bosne (stupac 4, 5. i 6 tabele 11).

Rijeka Vrbas spada u manje – uske vodotoke. I ovdje je upotreba bezdimezionalnog koeficijenta poprečnog miješanja 0,23, u u jednačini (9), dala dobre rezultate (stupac 5. i 6. tabele 11).

Uočen je veći odnos  $b/h$  za rijeku Bosnu, nego za rijeku Miljacku i Vrbas (stupac 8. tabela 11). Važno zapažanje [7], saglasno sa prethodnim [31], je da odgovarajući iznos dubine, koji je u stanju da omogući ili onemogući razvijanje sekundarnih struja, predstavlja veoma značajan parametar. Prema tome, nije isto ako odnos  $b/h$  raste prvenstveno zbog smanjenja dubine,  $h \rightarrow 0$ , ili zbog obostranog povećanja vrijednosti  $b$  i  $h$ .

Na osnovu radova Laua i Krishnappana [9, 43], može se zaključiti da se, još uvijek, za prirodne vodotoke ne može naći koeficijent poprečnog miješanja na osnovu parametara toka. I dalje treba eksperiment (GCM metoda [15]) ili eksperiment i model strujne cijevi [44].

S obzirom da nema dovoljno podataka za prirodne zakrivljene vodotoke (npr. podaci iz tabele 1), može se reći da tabela 11. predstavlja dodatne rezultate. Čini se da dobijeni bezdimezionalni koeficijent poprečnog miješanja za rijeku Bosnu (11,4 i 5,46, stupac 4. tabele 11) vjerodostojno predstavljaju stvarno stanje, imajući u vidu: turbulentne karakteristike, značajnu hrapavost korita, zakrivljenost i neuniformnost posmatranih poteza.

Utvrđeno je da bezdimezionalni koeficijent poprečnog miješanja vrijednosti 0,23, prvobitno dat jednačinom (5), općenito odgovara pravim i uniformnim prirodnim vodotocima [43, 1, 14, 34, 35, 7]. Ista vrijednost odgovara plitkim i uskim zakrivljenim neuniformnim, prirodnim vodotocima [2, 3, 36, 31] (tabele 1. i 11). U njima na proces rasprostiranja najveći uticaj ima poprečna turbulentna difuzija.

Za relativno uniformne prave, skoro prave i blago zakrivljene prirodne vodotoke može se veoma grubo ocijeniti [43, 15, 34] i preporučiti [7] prosječna vrijednost oko 0,5 bezdimezionalnog koeficijenta

poprečnog miješanja. Kod njih se već počinje javljati uticaj sekundarnih struja (združeni uticaj poprečne turbulentne difuzije i disperzije, tabela 1).

Za veće prirodne neuniformne i/ili zakrivljene vodotoke treba koristiti stvarne – eksperimentalno dobijene vrijednosti koeficijenta poprečnog miješanja [44, 15, 31] (tabele 1. i 11). Kod njih, osim poprečne turbulentne difuzije, postoje veoma značajne sekundarne struje kao predstavnici turbulentne disperzije.

Teorija uzdužne – jednodimezionalne disperzije ima veliki značaj za praktičnu – inženjersku upotrebu. Stalno se javljaju interesantni vidovi njenih analitičkih rješenja [45] ili praktične primjene [29, 30]. Takođe, i dvodimezionalni difuziono – disperzioni modeli, po dubini osrednjeni, veoma su važni i interesantni za otvorene vodotoke.

Izabrane su teorijske i eksperimentalne metode, zbog njihovih pozitivnih osobina, za određivanje koeficijenata jednodimezionalne uzdužne disperzije ( $D_D$  ili  $D_{D_{uk}}$ ) i dvodimezionalne difuzione ili difuziono – disperzione, po dubini osrednjene, jednačine ( $D_{t_2}$  ili  $D_{t-D_{2uk}}$ ). Pokazano je da su najbolje metode zasnovane na Taylorovim teorijama difuzije i disperzije [10, 5].

Uzimajući u obzir radove [27, 26, 46, 28, 47, te 16, 36, 31] i postojeću detaljnu analizu [20, 21, 3], pokazano je da su najpogodnije Fischerove metode za određivanje koeficijenata uzdužne – jednodimezionalne disperzije i područja primjene disperzione teorije, za prirodne i vještačke vodotoke predstavljene jednačinama (9), (10), (12) i (13).

Detaljnou analizom [16, 36, 13, 9, 14, 15, 31, 32, 33] pokazano je da su najprikladnije metode za određivanje koeficijenta poprečnog miješanja, tj. difuzionog –  $\bar{D}_{t_2}$  ili difuziono – disperzionog –  $D_{t-D_{2uk}}$ , za prirodne i vještačke vodotoke predstavljene jednačinama (5) i (16), uz odgovarajuće uslove primjene [13, 15]. Navedene metode imaju teorijsku podlogu i dobro su ispitane i potvrđene [14, 16, 4, 7, 38, 39, 42].

Izgleda da je za brdske vodotoke i navedeni tip ispusta, u kojima se potpuno poprečno miješanje obavlja na veoma kratkoj dužini, moguće dobiti odgovarajuće  $D_{t-D_{2uk}}$  i  $\alpha_{t-D_{2uk}}$ , na osnovu terenskih mjerenja na kratkim potezima, bez ubacivanja obilježivača sa obje

obale (stupci 3. i 4. tabele 11). Osrednjavanje uticaja neto poprečnih brzina vrši se direktna temperaturom – kao obilježivačem – raspoređenom duž cijelog poprečnog presjeka na posmatranom potezu.

Pokazano je da za uske i plitke prirodne vodotoke direktna upotreba jednačine (9) odgovara za praktične potrebe. Čini se da eksperimentalno određivanje  $D_{t-D_{2uk}}$  za njihove pojedine poteze ne bi imalo opravdanje, sa ekonomskog i vremenskog stanovišta.

#### LITERATURA (nastavak na I deo rada)

- [38] Bajraktarević-Dobran (H.) i Riđanović (M.). "Field Verification of Mathematical Model of Heat Disposal from Thermal Plant". XX IAHR Congress (Subject Ca, Vol. IV), Moscow, 1983, pp. 141-148.
- [39] Bajraktarević-Dobran (H.). Razvoj metode identifikacije rasprostiranja zagađenja u otvorenim vodotocima. (Radovi, br. 25). Zavod za hidrotehniku Građevinskog fakulteta u Sarajevu, Sarajevo, 1986, str. 70.
- [40] Šestakov (V.M.). "Smešenje stočnih vod v rekah". Vodossnabženie i sanitarnaja tehnika. No. 7, 1961, str. 15-18.
- [41] Bajraktarević-Dobran (H.), Sarajlić (M.) i Zajac (S.). Prijedlog metodike određivanja rasprostiranja vala zagađenja u otvorenim vodotocima u slučaju incidentnog zagađenja iz industrijskih objekata. (HZ/C – 135, elaborat), Zavod za hidrotehniku Građevinskog fakulteta u Sarajevu, Sarajevo, 1988, str. 114.
- [42] Bajraktarević-Dobran (H.). Prijedlog metodike određivanja rasprostiranja vala zagađenja u otvorenim vodotocima u slučaju incidentnog zagađenja iz industrijskih objekata. Naša vodoprivreda, br. 14-15, 1988, str. 27-47.
- [43] Lau (Y.L.) and Krishnappan (B.G.). "Modeling Transverse Mixing in Natural Streams". Journal of the Hydraulics Division, ASCE, Vol. 107, No. HY2, Proc. Paper 16048, 1981, pp. 209-226.
- [44] Yotsukura (N.) and Sayre (W.W.). "Transverse Mixing in Natural Channels". Water Resources Research, Vol. 12, No. 4, 1976, pp. 695-704.
- [45] Smith (R.). "A Delay - Diffusion Description for Contaminant Dispersion". J. Fluid Mech., Vol. 105, No. 9, 1981, pp. 469-486.
- [46] Christensen (B.A.). (Diskusija članka "Predicting Dispersion Coefficient of Streams" od Liu H., Journal of the Environmental Engineering Division, ASCE, Vol. 103, No. EE1, Proc. Paper 12724, 1977, pp. 59-69) Journal of the Environmental Engineering Division, ASCE, Vol. 103, No. EE6, Proc. Paper 13375, 1977, pp. 1144-1146.
- [47] Uchrin (C.G.). (Diskusija članka "Dispersion in Mountainous Natural Streams" od Bajraktarević-Dobran H., Journal of the Environmental Engineering Division, ASCE, Vol. 108, No. EE3, Proc. Paper 17134, 1982, pp. 502-514) Journal of the Environmental Engineering Division, ASCE, Vol. 109, No. EE4, 1983, pp. 969-970.

THE PARAMETERS OF THE DIFFUSION MODELS FOR SOME STREAMS IN B&H  
PART II: FIELD RESEARCH ON RIVERS IN B&H AND DETERMINING PARAMETERS OF THE  
DIFFUSION MODELS

by

Haša BAJRAKTAREVIĆ- DOBRAN  
Faculty of Civil Engineering, Sarajevo

Summary

A detailed summary of the entire article (both parts) is shown in its first part, in the last issue, which relates to theoretical research of diffusion and dispersion processes in natural waterstreams. This (second) part presents the results of field research on the three waterstreams in Bosnia and Herzegovina (Miljacka, Bosna and Vrbas) with the determination of the appropriate parameters of the diffusion models. Measurements of that kind are very rare in the world, so

these results are of great importance, because they enable conclusions on the possibility of applying certain mathematical models of turbulent diffusion-dispersion processes in rivers.

Key words: open streams, field researches, transverse mixing, longitudinal dispersion, rivers Miljacka, Bosna and Vrbas

Redigovano 14.10.2017.