

## MODELIRANJE RAVANSKOG STRUJANJA METODOM ETAPNOG REŠAVANJA ČLANOVA JEDNAČINA

Mr Ljubomir BUDINSKI, dipl. građ. inž., Građevinski fakultet u Subotici  
R.prof.dr. Miodrag SPASOJEVIĆ, Građevinski fakultet u Subotici

### REZIME

U ovom članku predstavljeni su rezultati matematičkog modelisanja ravanskog strujanja (osrednjenog po dubini toka) u prirodnim vodotocima. Izbor numeričkog modela je od presudne važnosti za razmatrani proces koji se modelira. U ovu svrhu razvijeni su različiti modeli kojima se pokušava što tačnije opisati strujanje u prirodnom vodotoku. Jedno od optimalnih rešenja prikazano je u ovom radu. Izvršena je kompletna transformacija u krivolinijske koordinate Reynolds-ovih jednačina osrednjenih po dubini toka. Dobijene jednačine rešavane su postupkom etapnog rešavanja pojedinih članova. Ovo podrazumeva zasebno rešavanje procesa advekcije, zatim difuzije i na kraju člana propagacije koji se kombinuje sa jednačinom kontinuiteta. U cilju postizanja većeg stepena numeričke stabilnosti modela, što uključuje i veću tačnost dobijenih rezultata, svaki od članova modeliran je numeričkom metodom koja najviše odgovara karakteru jednačine. Posebna pažnja je posvećena advektivnom koraku, kao izuzetno osetljivom članu. U radu su prikazane izvedene jednačine u krivolinijskim koordinatama, numerički postupci za svaki od koraka, kao i primena modela na jedan primer rečnog toka.

**Ključne reči:** ravanski model, krivolinijske koordinate, metoda etapnog rešavanja članova jednačina, primena na realni problem, poređenje rezultata sa terenskim merenjima.

### 1. Uvod

Prirodna geometrija vodotoka nameće složeno strujanje koje je isključivo prostornog karaktera. Kako bi se sagledali ovako nastali procesi, razvijeni su različiti numerički modeli - linijski, ravanski i prostorni, sa različitom oblasti primene. Ravanski modeli su zasnovani na pretpostavci hidrostatičkog rasporeda

pritisaka po dubini toka, čime se oblast primene ograničava na tokove sa slabo izraženim strujanjem u vertikalnom pravcu. Većina prirodnih vodotoka spada u ovu grupu, pa je primena ovih modela opravdana. Dodatna prednost ravanskih modela u odnosu na prostorni ogleda se u periodu simulacije, koji je kod 2D modela mnogo veći, čime se postiže mogućnost dugoročnih prognoza. Takođe, za postizanje visoke stabilnosti i tačnosti modela, izbor numeričke metode predstavlja jedan od osnovnih elemenata.

Numerički model opisan u ovom radu baziran je na Reynolds-ovim jednačinama osrednjenim po dubini toka, usled čega se od vertikalnog ubrzanja javlja samo gravitaciono ubrzanje. U cilju definisanja složene geometrije vodotoka, na jednačine je primenjena kompletna transformacija u krivolinijske koordinate, čime se razmatrana fizička oblast svodi na pravougaonu računsku oblast. Kako bi se postigla što veća tačnost rezultata, svaki od članova transformisanih jednačina toka modeliran je zasebno.

Ovakvo definisanje modela ima za cilj da formira stabilnu bazu koja pored proračuna osnovnih elemenata toka, vrši proračune transporta nanosa - suspendovanog i vučenog, što će biti obrađeno u jednom od narednih radova.

### 2. Jednačine osrednjene po dubini

U otvorenim tokovima sa blago promenljivim neustaljenim tečenjem, promene elemenata toka (komponente brzine, dubina) u vertikalnom pravcu, zanemarljive su u odnosu na promene u horizontalnom pravcu. Ovo podrazumeva zanemarenje vertikalnog ubrzanja fluidnih delića u odnosu na gravitaciono ubrzanje. Nakon osrednjavanja po dubini toka, uz korišćenje navedenih pretpostavki, Reynolds-ove jednačine se tada svode na [1] :

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial(Hu)}{\partial x} + \frac{\partial(Hv)}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial Hu}{\partial t} + \frac{\partial(Hu^2)}{\partial x} + \frac{\partial(Huv)}{\partial y} = -gH \frac{\partial Z_s}{\partial x} - \frac{\partial(Hu'^2)}{\partial x} - \frac{\partial(Hu'v')}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial}{\partial x} (H\tau_{xx}) \right) + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial}{\partial y} (H\tau_{yx}) \right) + \frac{1}{\rho} \tau_{xx} - \frac{1}{\rho} \tau_{ox} \quad (2)$$

$$\frac{\partial Hv}{\partial t} + \frac{\partial(Huv)}{\partial x} + \frac{\partial(Hv^2)}{\partial y} = -gH \frac{\partial Z_s}{\partial y} - \frac{\partial(Hu'v')}{\partial x} - \frac{\partial(Hv'^2)}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial}{\partial x} (H\tau_{xy}) \right) + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial}{\partial y} (H\tau_{yy}) \right) + \frac{1}{\rho} \tau_{yy} - \frac{1}{\rho} \tau_{oy} \quad (3)$$

gde su :

$u, v$  – komponente brzina u kartezijanskim koordinatama

$Z_s$  – nivo vode

$H$  – dubina vode

Tangencijalni naponi usled molekularne viskoznosti i fluktuacija brzine se računaju na osnovu

$$\tau_{i,j} = \mu \frac{\partial u_{i,j}}{\partial x_i} - \rho u'_i u'_j$$

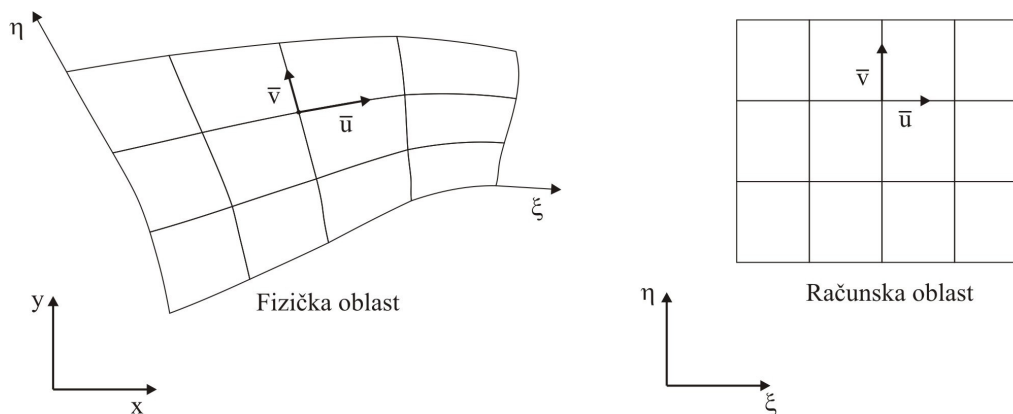
$u', v'$  - odstupanje od srednjih vrednosti brzina (po dubini)

Izrazi za tangencijalne napone na rečnom dnu dobijeni su korišćenjem Manning-ove formule :

$$\tau_{ox} = \frac{\rho g n^2 u \sqrt{u^2 + v^2}}{H^{1/3}} ; \tau_{oy} = \frac{\rho g n^2 v \sqrt{u^2 + v^2}}{H^{1/3}} .$$

### 3. Jednačine toka u krivolinijskim koordinatama

Da bi se lakše opisala složena geometrija prirodnih vodotoka kao i tačnije definisali granični uslovi potrebno je transformisati jednačine toka u krivolinijske koordinate. Šematski prikaz dat je na Slici 1.



Slika 1. Razmatrana oblast tečenja

U ovom radu primenjena je kompletna transformacija na sve članove, osim člana advekcije koji je delimično transformisan zbog potreba numeričkog modela koji će biti opisan u nastavku. Posle izvršene parcijalne transformacije izvoda, i zamenom kartezijanske komponente brzine krivolinijskom komponentom :

$$u = \frac{\partial x}{\partial \xi} \bar{u} + \frac{\partial x}{\partial \eta} \bar{v}, \quad v = \frac{\partial y}{\partial \xi} \bar{u} + \frac{\partial y}{\partial \eta} \bar{v} \quad (4)$$

gde su :

$\bar{u}, \bar{v}$  - krivolinijske komponente brzine,

*Metoda razlomljenih koraka* [2], koja podrazumeva zasebno rešavanje pojedinih članova, jednačine ravanskog toka svodi na sledeći oblik :

- jednačina kontinuiteta

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{J} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} (JH\bar{u}) \right] + \frac{1}{J} \left[ \frac{\partial}{\partial \eta} (JH\bar{v}) \right] = 0 \quad (5)$$

- dinamička jednačina u  $\xi$ - pravcu

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \left( u \frac{\partial \xi}{\partial x} + v \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) \frac{\partial u}{\partial \xi} + \left( u \frac{\partial \eta}{\partial x} + v \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 - \text{advekcija} \quad (6)$$

$$\frac{\partial H\bar{u}}{\partial t} = [\dots] - \text{difuzija}$$

$$\frac{\partial H\bar{u}}{\partial t} = \frac{gH}{J^2} \left[ -\frac{\partial Z_s}{\partial \xi} G_{22} + \frac{\partial Z_s}{\partial \eta} G_{12} \right] - \frac{gn^2 \bar{u}}{JH^{1/3}} \sqrt{\bar{u}^2 G_{11} + 2\bar{u}\bar{v} G_{12} + \bar{v}^2 G_{22}} + \left. \begin{aligned} & \frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\tau_{xx}}{\rho} - \frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\tau_{sy}}{\rho} \end{aligned} \right\} - \text{propagacija}$$

- dinamička jednačina u  $\eta$  - pravcu

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \left( u \frac{\partial \xi}{\partial x} + v \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) \frac{\partial v}{\partial \xi} + \left( u \frac{\partial \eta}{\partial x} + v \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0 - \text{advekcija} \quad (7)$$

$$\frac{\partial H\bar{v}}{\partial t} = [\dots] - \text{difuzija}$$

$$\frac{\partial H\bar{v}}{\partial t} = \frac{gH}{J^2} \left[ -\frac{\partial Z_s}{\partial \eta} G_{11} + \frac{\partial Z_s}{\partial \xi} G_{12} \right] - \frac{gn^2 \bar{v}}{JH^{1/3}} \sqrt{\bar{u}^2 G_{11} + 2\bar{u}\bar{v} G_{12} + \bar{v}^2 G_{22}} - \left. \begin{aligned} & \frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\tau_{sx}}{\rho} + \frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\tau_{sy}}{\rho} \end{aligned} \right\} - \text{propagacija}$$

$$J = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta}$$

Metrički koeficijenti su:

$$G_{11} = \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2, \quad G_{22} = \left( \frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2, \quad G_{12} = G_{21} = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta}$$

Difuzioni članovi u jednačinama (6) i (7) zbog svog obima dati su u Prilogu 1.

#### 4. Numeričke metode

Osnovna prednost *metode etapnog rešavanja* ogleda se u mogućnosti rešavanja pojedinih članova jednačina toka numeričkom metodom koja najbolje odgovara samom karakteru jednačine. Na taj način metoda u velikoj meri eliminiše nestabilnost numeričkih šema i povećava tačnost dobijenih rezultata.

Svaki od navedenih članova modeliran je u pravougaonoj računskoj  $\xi$ - $\eta$  oblasti, uz primenu odgovarajućeg numeričkog modela.

- Advektivni član kao izuzetno osetljiv, rešavan je metodom karakteristika. Dve parcijalne diferencijalne jednačine (prethodno izvedene) svode se na dve obične diferencijalne jednačine :

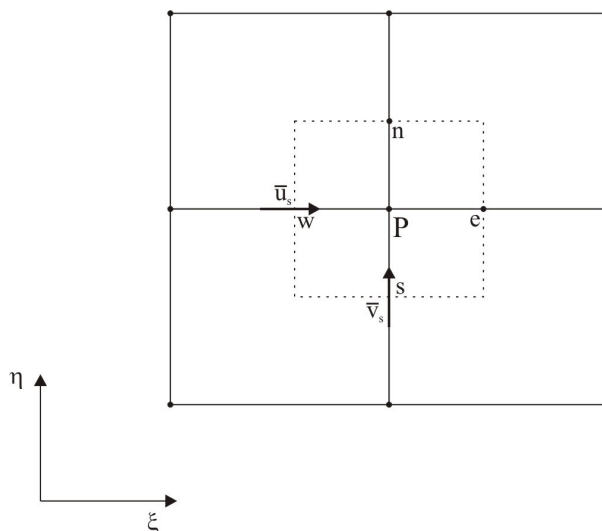
$$\left. \begin{aligned} \frac{Du}{Dt} = 0 \\ \frac{Dv}{Dt} = 0 \end{aligned} \right\} \text{rešavane duž karakteristika definisanih izrazima} \left\{ \begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} = u \frac{\partial \xi}{\partial x} + v \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{d\eta}{dt} = u \frac{\partial \eta}{\partial x} + v \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{aligned} \right. \quad (8)$$

Dobijene jednačine su integraljene duž karakteristika, čime se dobijaju eksplicitno-implicitni algebarski izrazi, koji su zatim rešavani metodom prostih iteracija. Vrednosti brzina u podnožju karakteristika određivane su kubnom interpolacijom u ravni, po metodi *Holly-Preissmann* - a. Na ovaj način eliminiše se ograničenje usled Courant-ovog broja, što je od velikog značaja za stabilnost modela i potrebno vreme simulacije.

- Član difuzije ( $\xi$ - $\eta$  pravac) rešavan je metodom konačnih razlika, sa primenom *Crank-Nicholson*-ove šeme. Time se dobija tri-dijagonalna matrica koeficijenata koja se rešava *Thomas*-ovim (double-sweep) algoritmom u kombinaciji sa *ADI* metodom.
- Član propagacije je kombinovan sa jednačinom kontinuiteta, čime se dobija izraz koji je zatim diskretizovan metodom konačnih razlika i rešavan na tzv. *smaknutoj mreži* kako bi se postigla visoka stabilnost modela. I u ovom slučaju je korišten *Thomas*-ov (double-sweep) algoritam u kombinaciji sa *ADI* metodom. Šematski prikaz smaknute mreže dat je na Slici 2.

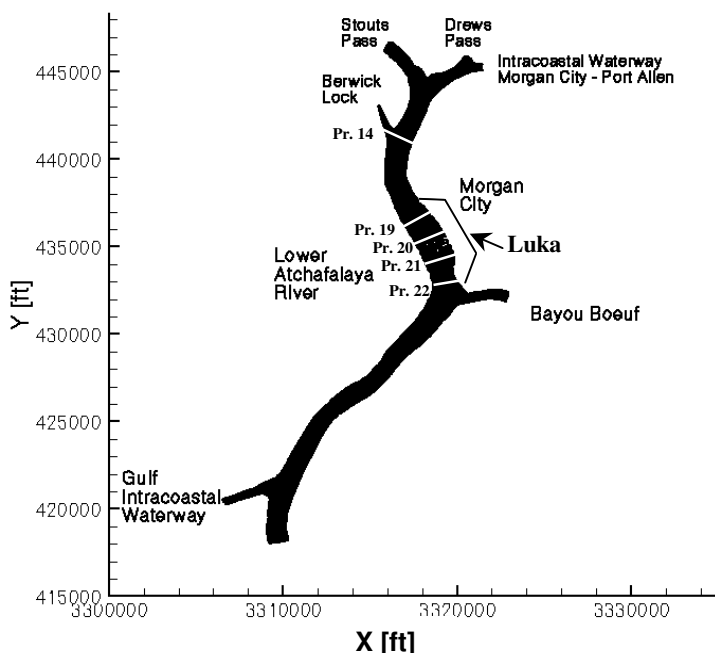
## 5. Pregled i analiza dobijenih rezultata

Verifikacija numeričkog modela izvršena je na deonici reke *Atchafalaya*, lociranoj u državi *Louisiana*.

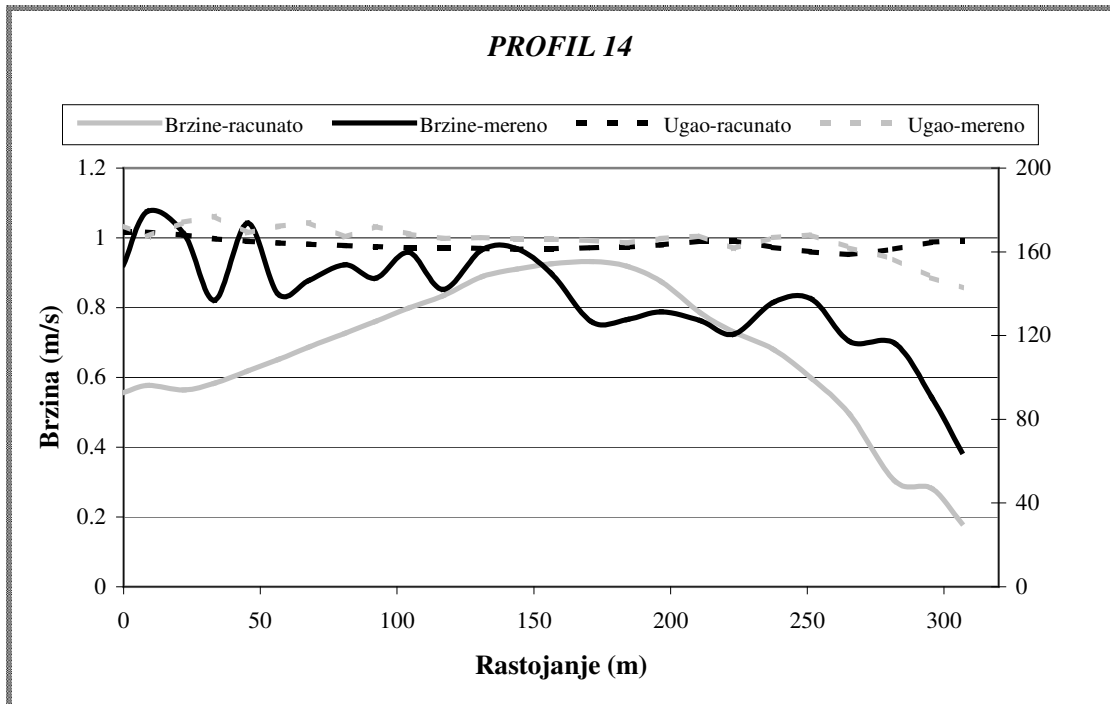


Slika 2. Smaknuta mreža

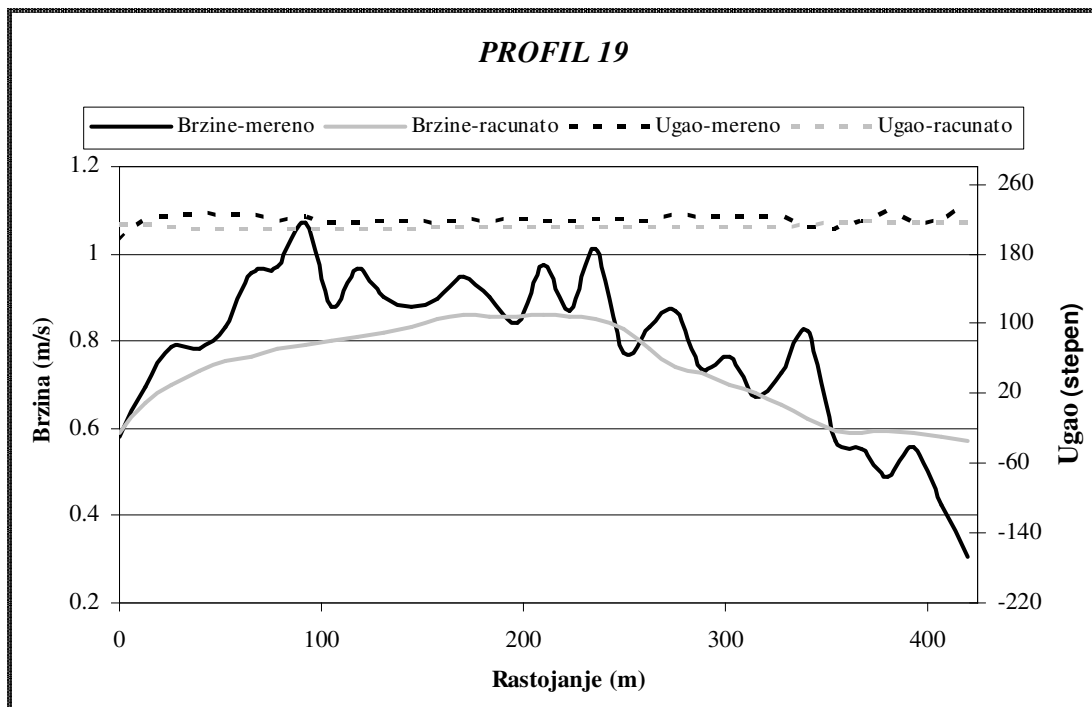
Razmatrana deonica se nalazi kod *Berwick Bay* luke pored grada *Morgan City* (Slika 3). Na ovom delu toka izvršena su merenja brzina *ADCP* metodom u određenom broju vertikala, koje su zatim za potrebe modela osrednjene po dubini. Rezultati merenja upoređeni sa rezultatima dobijenim primenom numeričkog modela prikazani su na Slikama 4,5,6,7,8.



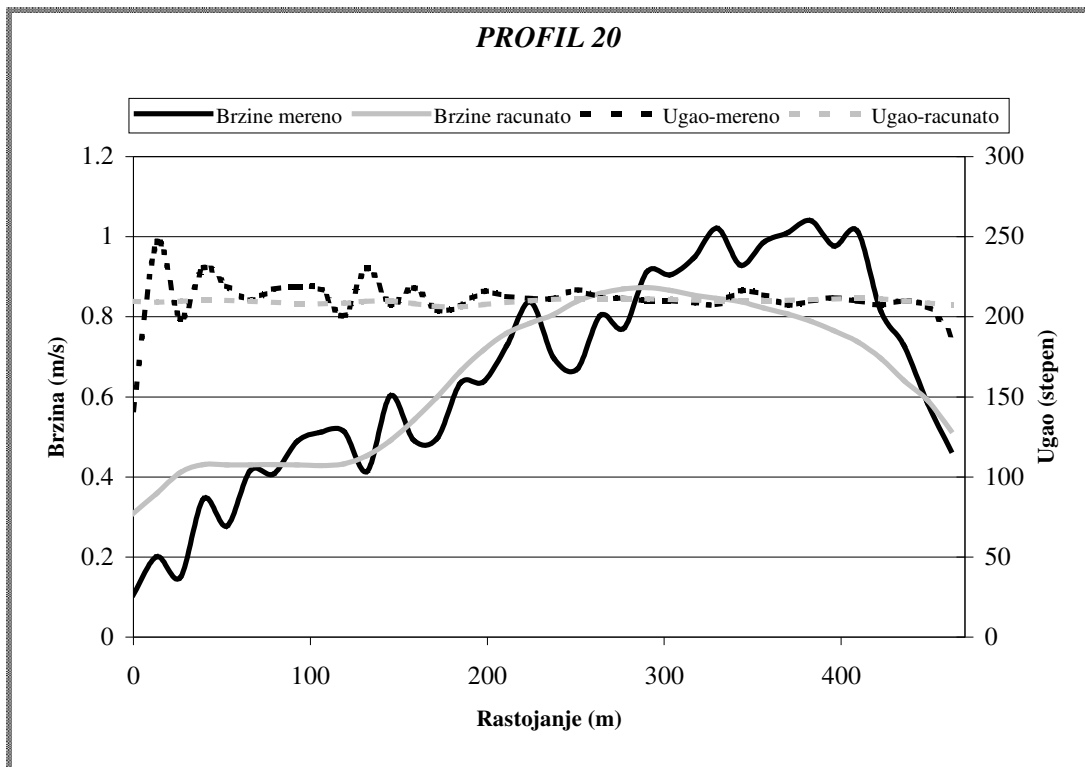
Slika 3. Situacija Atchafalaya reke



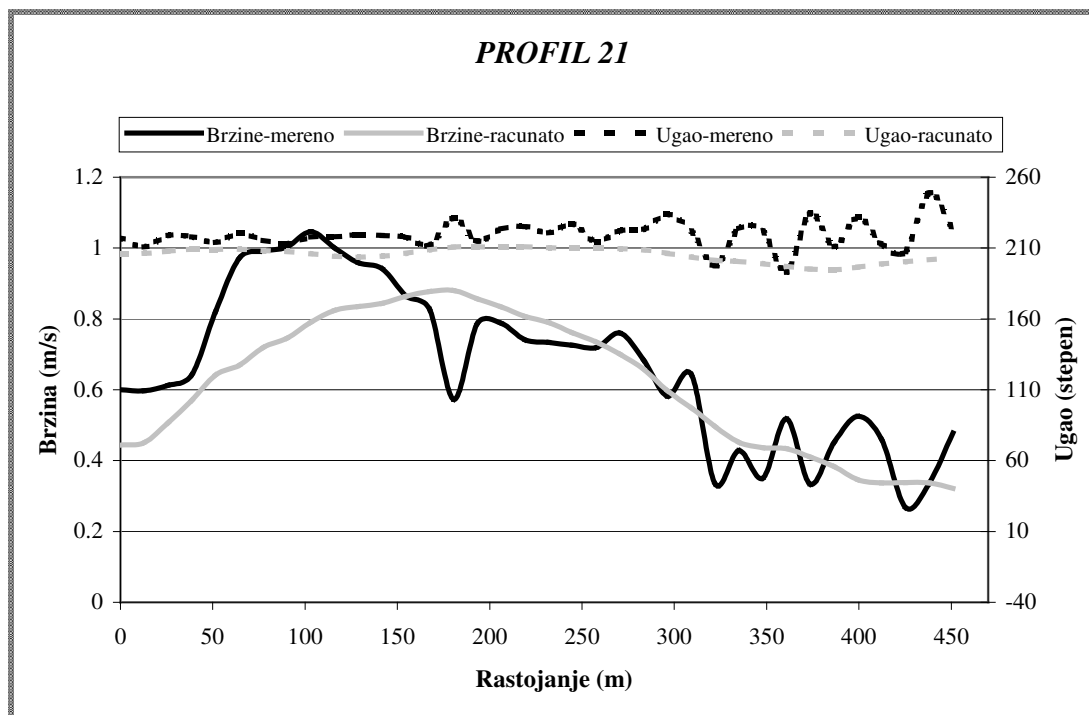
Slika 4. Prikaz rezultata merenja i proračuna za Profil 14



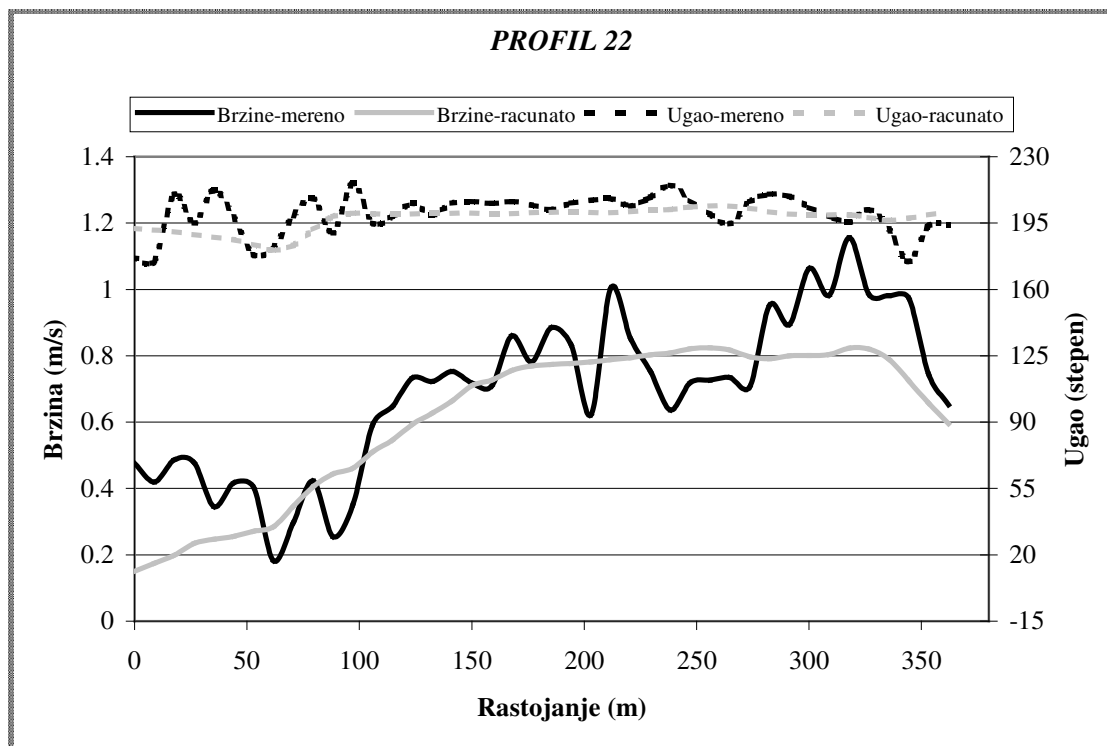
Slika 5. Prikaz rezultata merenja i proračuna za Profil 19



Slika 6. Prikaz rezultata merenja i proračuna za Profil 20



Slika 7. Prikaz rezultata merenja i proračuna za Profil 21



Slika 8. Prikaz rezultata merenja i proračuna za Profil 22

Upoređenje je izvršeno za ukupne vektore brzina (puna linija) i uglove pravca (isprekidana linija) merenih u odnosu na x-osu. Rezultati proračuna pokazuju relativno dobro slaganje sa merenim vrednostima duž poprečnog profila, kako za brzine tako i za uglove pravca. Dobijene vrednosti prate tendenciju promene brzina po poprečnom profilu uz određena odstupanja. Ova odstupanja mogu se objasniti pretpostavkom hidrostatičke raspodele pritisaka po dubini, što je ujedno i ograničavajući faktor ravanskog modela. Takođe, merenje brzina vršeno je sa plovila u pokretu, tako da je period uzorkovanja bio izuzetno kratak (red veličine vremena potrebnog da zvučni signal pređe rastojanje jednako dubini toka). Zbog toga originalno merene brzine po vertikali pokazuju značajan uticaj turbulentnih fluktuacija. Naknadna istraživanja su pokazala da merenje brzina ADCP metodom zahteva mnogo duže uzorkovanje (reda veličine 5-10 minuta) po svakoj vertikali. Ovim se može objasniti fluktuacioni karakter merenih brzina.

## 6. Zaključak

Da bi se što tačnije opisalo strujanje u prirodnim vodotocima primenjen je numerički model baziran na kompletno transformisanim Reynolds-ovim jednačinama osrednjenim pod dubini toka. Jednačine su modelirane

metodom etapnog rešavanja članova jednačina što omogućava modeliranje svakog člana zasebno, uz izbor numeričke metode koja najviše odgovara fizičkom značenju odgovarajućih članova.

Dobijeni rezultati pokazuju dobro slaganje sa merenim vrednostima uz određena odstupanja, koja su posledica neadekvatnog uzorkovanja.

Osnovni cilj opisanog modela je formiranje stabilne i robustne numeričke baze za proračun tečenja, koja je potrebna za modeliranje transporta suspendovanog i vučenog nanosa što će biti obrađeno u sledećoj fazi ovog istraživanja.

## LITERATURA

- [1] Jovanović, M. (1998), *Osnove numeričkog modeliranja ravanskih tokova*, Građevinski fakultet, Beograd.
- [2] Spasojević, M. (1996), *Numerička hidraulika*, Građevinski fakultet, Subotica.
- [3] Spasojević, M., Muste, M. (2000), *Numerical Model Study of Berwick Harbor, Morgan City, Louisiana*, Iowa Institute of Hydraulic Research, Iowa City.

**Prilog 1**

- član difuzije u  $\xi$ - pravcu

$$\begin{aligned} \frac{\partial H\bar{u}}{\partial t} = & \frac{1}{J^2} \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \frac{A_H G_{22}}{J} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \bar{u} + \frac{\partial x}{\partial \eta} \bar{v} \right) \right] - \frac{1}{J^2} \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \frac{A_H G_{22}}{J} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial y}{\partial \xi} \bar{u} + \frac{\partial y}{\partial \eta} \bar{v} \right) \right] + \\ & + \frac{1}{J^2} \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ \frac{A_H G_{11}}{J} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \bar{u} + \frac{\partial x}{\partial \eta} \bar{v} \right) \right] - \frac{1}{J^2} \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ \frac{A_H G_{11}}{J} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\partial y}{\partial \xi} \bar{u} + \frac{\partial y}{\partial \eta} \bar{v} \right) \right] - \\ & - \frac{1}{J^2} \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \frac{A_H G_{12}}{J} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \bar{u} + \frac{\partial x}{\partial \eta} \bar{v} \right) \right] - \frac{1}{J^2} \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ \frac{A_H G_{12}}{J} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \bar{u} + \frac{\partial x}{\partial \eta} \bar{v} \right) \right] + \\ & + \frac{1}{J^2} \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \frac{A_H G_{12}}{J} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\partial y}{\partial \xi} \bar{u} + \frac{\partial y}{\partial \eta} \bar{v} \right) \right] + \frac{1}{J^2} \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ \frac{A_H G_{12}}{J} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial y}{\partial \xi} \bar{u} + \frac{\partial y}{\partial \eta} \bar{v} \right) \right]. \end{aligned}$$

- član difuzije u  $\eta$  - pravcu

$$\begin{aligned} \frac{\partial H\bar{v}}{\partial t} = & \frac{1}{J^2} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \frac{A_H G_{22}}{J} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial y}{\partial \xi} \bar{u} + \frac{\partial y}{\partial \eta} \bar{v} \right) \right] - \frac{1}{J^2} \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \frac{A_H G_{22}}{J} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \bar{u} + \frac{\partial x}{\partial \eta} \bar{v} \right) \right] + \\ & + \frac{1}{J^2} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ \frac{A_H G_{11}}{J} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\partial y}{\partial \xi} \bar{u} + \frac{\partial y}{\partial \eta} \bar{v} \right) \right] - \frac{1}{J^2} \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ \frac{A_H G_{11}}{J} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \bar{u} + \frac{\partial x}{\partial \eta} \bar{v} \right) \right] - \\ & - \frac{1}{J^2} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \frac{A_H G_{12}}{J} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\partial y}{\partial \xi} \bar{u} + \frac{\partial y}{\partial \eta} \bar{v} \right) \right] - \frac{1}{J^2} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ \frac{A_H G_{12}}{J} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial y}{\partial \xi} \bar{u} + \frac{\partial y}{\partial \eta} \bar{v} \right) \right] + \\ & + \frac{1}{J^2} \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \frac{A_H G_{12}}{J} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \bar{u} + \frac{\partial x}{\partial \eta} \bar{v} \right) \right] + \frac{1}{J^2} \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ \frac{A_H G_{12}}{J} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \bar{u} + \frac{\partial x}{\partial \eta} \bar{v} \right) \right]. \end{aligned}$$

**TWO-DIMENSIONAL (PLAN-VIEW) FLOW MODELING - FRACTIONAL-STEP APPROACH**

by

Mr Ljubomir BUDINSKI, Faculty of Civil Engineering, Subotica  
R.prof.dr. Miodrag SPASOJEVIĆ, Faculty of Civil Engineering, Subotica

**Summary**

This paper presents ongoing-research results with the final goal of developing two-dimensional (horizontal-plan) mathematical model able to produce long-term simulations of flow and sediment interaction in natural watercourses. The focus of the research at this phase is the development of a robust and reliable two-dimensional flow-simulation engine. The flow model is based on depth-averaged equations fully adapted to general curvilinear coordinates. The equations are solved by using a fractional-step approach, including advection, diffusion, and propagation steps. Each step is

solved by using a numerical method that is in agreement with the mathematical character of the equations governing the particular-step. The paper presents the flow-model application to a particular study case, including the comparison of computed results with detailed field observations..

Key words: two-dimensional model, curvilinear coordinates, fractional-step approach, study-case application, comparison of model results and field data.

Redigovano 15.05.2007.



