

## STATISTIČKA ANALIZA VELIKIH VODA DUNAVA I SAVE NA PODRUČJU BEOGRADA

Jasna PLAVŠIĆ, Marko IVETIĆ  
Univerzitet u Beogradu – Građevinski fakultet

### REZIME

U radu je prikazan postupak analize koincidencije maksimalnih godišnjih protoka na Dunavu i Savi u zoni Beograda, koja je specifična po tome što se nalazi pod usporom akumulacije Đerdap. Za efikasnu zaštitu od velikih voda u zonama ušća dve reke od ključnog značaja je procena verovatnoće koincidencije velikih voda obe reke, s obzirom da velike vode pritoke mogu uticati na velike vode glavne reke. U zoni Beograda posle uspostavljanja akumulacije Đerdap ne postoje sistematska merenja protoka, pa se računski protoci velikih voda i njihova koincidencija moraju proceniti na osnovu protoka na uzvodnim stanicama. Metodološki postupak sastojao se od analize godišnje koincidencije velikih voda Dunava, Tise i Save na osnovu raspoloživih podataka, pri čemu je određena trodimenzionalna raspodela velikih voda na ove tri reke kojom se uzima u obzir korelacija između pojave velikih voda na njima. Monte Karlo simulacijama iz dobijene trodimenzionalne raspodele formirana je raspodela velikih voda na Dunavu uzvodno od Beograda i određena koincidencija godišnjih maksimuma Dunava i Save kod Beograda.

**Ključne reči:** velike vode, statistička analiza, maksimalni godišnji protoci, koincidencija, dvodimenzionalna raspodela, trodimenzionalna raspodela, računski protoci, merodavni protoci.

### 1. UVOD

Proračun merodavnih protoka za analize i projektovanje hidrotehničkih objekata i sistema, a naročito objekata za zaštitu od velikih voda, jedan je od osnovnih inženjerskih zadataka u hidrotehnici i vodoprivredi. Hidrološke analize kojima se ocenjuju velike vode različite verovatnoće pojave su prvi korak u takvim analizama i projektima, pa od rezultata hidroloških proračuna zavise i rezul-

tati svih ostalih koraka: hidrauličkih proračuna, izbora sistema zaštite, dimenzije objekata itd.

Računski protoci velikih voda procenjuju se na različite načine u zavisnosti od više faktora, ali zapravo najviše u zavisnosti od raspoloživosti podataka na mestima gde te protoke treba proceniti. Postojanje dugoročnih merenja na profilima od interesa ili u njihovoj blizini je najpovoljnija opcija jer se tada koriste statističke metode kojima se ocenjuje verovatnoća pojave računskih protoka. Uobičajeni postupak je da se raspodela verovatnoće velikih voda odredi prilagođavanjem neke teorijske raspodele verovatnoće nizovima osmotrenih godišnjih maksimuma, a može se primeniti i nešto složenija metoda prekoračenja preko praga (Plavšić, 2006). U slučajevima kada ne postoje raspoloživi podaci osmatranja, računski protoci se moraju proceniti na osnovu padavina i primene modela padavine-otica. Spektar faktora koji utiču na pouzdanost takvih procena računskih protoka je veoma širok, a neizvesnosti u procenama mogu biti veoma velike. Iako se u statističkoj analizi hidroloških nizova mogu sresti različiti problemi (npr. Blagojević i sar. 2014), njenom pažljivom primenom može se doći do rezultata sa prihvatljivom neizvesnošću.

Specifičan problem u proceni računskih protoka predstavljaju zone ušća dve reke. U takvim zonama od interesa su protoci na obe reke uzvodno od ušća kao i na glavnoj reci nizvodno od ušća. Ovo je naročito važno prilikom definisanja graničnih uslova za potrebe hidrauličkih proračuna. S obzirom da na velike vode jedne (glavne) reke mogu uticati velike vode druge reke (pritoke), za efikasnu zaštitu od velikih voda u zonama ušća od ključnog je značaja da se što bolje proceni verovatnoća istovremene pojave (koincidencije) velikih voda obe reke.

Sa gledišta teorije verovatnoće, protoci dve reke koje se ulivaju jedna u drugu predstavljaju dvodimenzionalnu

slučajnu promenljivu sa dvodimenzionalnom raspodelom verovatnoće, koja treba da opiše međusobnu zavisnost verovatnoće pojave protoka jedne i druge reke. Takođe, protoci glavne reke nizvodno od ušća predstavljaju funkciju (zbir) dve slučajne promenljive, čija raspodela zavisi od dvodimenzionalne raspodele protoka na pritokama uzvodno od ušća.

Dvodimenzionalna (2D) raspodela dve korelisane slučajne promenljive se u opštem slučaju može odrediti ako su poznate njihove marginalne (jednodimenzionalne) raspodele. Određivanje takve raspodele analitičkim putem može da bude komplikovano, pa čak i nemoguće ako ne postoje osmatranja protoka na pritoci uzvodno od ušća. Najjednostavniji pristup se zasniva na empirijskim raspodelama protoka na dve reke i empirijskim uslovnim raspodelama protoka nizvodno od ušća u zavisnosti od uzvodnog dotoka (USACE, 1993). Analitički statistički aparat za definisanje 2D raspodele je najrazvijeniji za nizove sa normalnim marginalnim raspodelama ili onima koji se transformacijom mogu normalizovati, kada se dobija 2D normalna raspodela (Prohaska i Ilić, 2010). Postoje rešenja i za druge raspodele, kao što je 2D eksponencijalna raspodela ili 2D raspodela ekstremnih vrednosti, koje su u pojedinim radovima primenjene na velike vode (npr. Wang, 2001). U novije vreme se za identifikaciju 2D raspodele sve više koriste kopule, metod u kome se kombinuju 2D raspodele sa uniformnim marginalnim raspodelama i određene transformacije kojima se razmatrane promenljive svode na uniformno raspoređene promenljive (npr. Karmakar i Simonovic, 2009). Ukoliko na glavnoj reci nizvodno od ušća ne postoje osmatranja, određivanje raspodele zbira protoka dve pritoke se samo u retkim slučajevima može pronaći analitički, pa se mora pribеći numeričkim tj. Monte Carlo simulacijama (npr. Wang, 2016).

U ovom radu prikazana je analiza velikih voda koja je sprovedena u sklopu projekta zaštite Beograda od velikih voda Dunava i Save (Hidrozaovod DTD i Građevinski fakultet, 2017). Zadatak analize je bio da se definišu merodavni protoci velikih voda Dunava uzvodno od ušća Save, na Savi i na Dunavu nizvodno od ušća Save. Nabrojane lokacije generalno odgovaraju lokacijama vodomernih stanica Zemun i Pančevo na Dunavu i Beograd na Savi (slika 1). Na ovim stanicama se meri samo vodostaj, pa se protoci ocenjuju na osnovu podataka o protocima na uzvodnim stanicama.

S obzirom da na Dunavu neposredno uzvodno od Beograda ne postoje merenja protoka, metodološki postupak za određivanje merodavnih protoka sastojao se od analize godišnje koincidencije velikih voda Dunava, Tise i

Save. Kao ulaz za ovu analizu korišćeni su nizovi maksimalnih godišnjih protoka Dunava kod Bogojeva, Tise kod Sente i Save kod Sremske Mitrovice. Za ove tri lokacije određena je trodimenzionalna raspodela velikih voda kojom se uzima u obzir korelacija između pojave velikih voda na ovim stanicama. Formirana trodimenzionalna raspodela je osnov za određivanje merodavnih protoka u zoni Beograda, i to:

- 1) Raspodela velikih voda Dunava uzvodno od Beograda dobijena je tako što je određena dvodimenzionalna raspodela velikih voda na stanicama Bogojevo na Dunavu i Senta na Tisi i iz nje statističkim simulacijama dobijena raspodela zbira velikih voda Dunava i Tise.
- 2) Proračun velikih voda Save uzvodno od ušća sproveden je sa podacima sa stanice Sremska Mitrovica s obzirom da je to najnižvodnija stanica na Savi na kojoj se meri protok i koja nije pod uticajem uspora Đerdapa. Velike vode Kolubare nisu razmatrane. U uslovima koincidencije velikih voda Save i Kolubare, visoka Sava ne može da primi dodatne vode Kolubare, što je bio slučaj i tokom poplava u maju 2014. godine.
- 3) Proračun koincidencije velikih voda Dunava i Save zasnovan je na statističkim simulacijama niza maksimalnih godišnjih protoka na tri lokacije iz ofornjlene trodimenzionalne raspodele velikih voda, iz koje je u prvom koraku dobijen simulirani zbirni niz na Dunavu uzvodno od Beograda. Sa tim simuliranim nizom i sa korespondentnim simuliranim protocima Save izračunata je koincidencija njihove pojave.

Višestruku koincidenciju zapremina talasa velikih voda Dunava, Tise i Save razmatrali su Prohaska i Ilić (2010).

U nastavku ovog rada biće prikaz raspoloživih podataka, detaljniji opis navedenog postupka za definisanje merodavnih velikih voda i rezultati proračuna.

## 2. METODOLOGIJA

### 2.1 Raspoloživi podaci

Glavne hidrološke stanice na Dunavu, Savi i Tisi u široj zoni uzvodno od Beograda prikazane su na slici 1, dok tabela 1 prikazuje periode raspoloživih podataka. Kako su akumulacija i HE Đerdap I počele sa radom 1970. godine, protoci na Dunavu se mere znatno uzvodnije od Beograda zbog uticaja uspora akumulacije Đerdap.



Slika 1. Lokacije hidroloških stanica na Dunavu, Tisi i Savi.

Tabela 1. Raspoloživi podaci o godišnjim maksimumima vodostaja i protoka.

Stanica	Vodostaji	Protoci
Dunav Bogoevo		1950-1995, 1998-2009, 2012-2015
Dunav Novi Sad	1892-2015	1991-1998, 2004-2015
Dunav Zemun	1920-2015	/
Dunav Pančevo	1919-2015	/
Tisa Senta	1921-2015	1931-2015
Sava S. Mitrovica	1920-2015	1926-2015
Sava Beograd	1920-2015	/

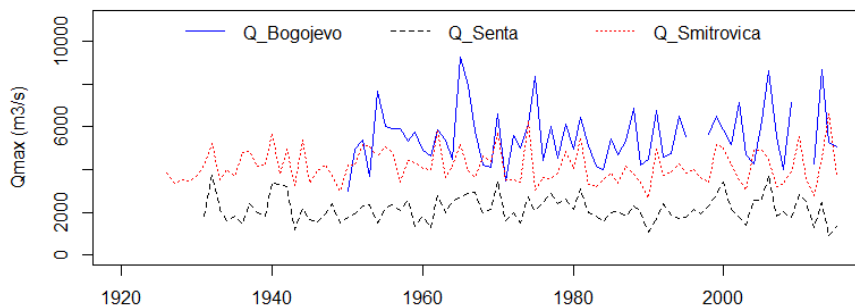
Iako stanica Novi Sad ima najduži niz osmatranja vodostaja (od 1892. godine), na njoj se protok meri od 1991. uz prekide tako da efektivna dužina niza iznosi 20 godina. Uzvodno od Novog Sada duži niz osmatranja protoka postoji na stanici Bogoevo, za period 1950-2015, uz kraće prekide tokom ukupno četiri godine. Maksimalni protoci kod Bogoeva i Novog Sada u velikoj meri se slažu u godinama kada postoje osmotreni podaci na obe stanice. Između maksimalnih godišnjih protoka na ove dve stanice kao i između datuma njihove pojave postoji visoka korelacija, što ukazuje da svi korespondentni maksimumi potiču iz istih događaja velikih voda. Iz navedenih razloga za proračune koincidencije Dunava, Tise i Save usvojen je niz raspoloživih maksimalnih godišnjih protoka na stanici Bogoevo.

Stanica Senta na Tisi je najnižvodnija hidrološka stanica na ovoj reci sa reprezentativnim podacima o protocima, jer su nizvodne deonice pod uticajem brane kod Novog Bečeja. Na Savi, jedina stanica sa relevantnim podacima je Sremska Mitrovica kao najnižvodnija stanica na Savi na kojoj se meri protok i koja nije pod uticajem uspora Đerdapa. Na slici 2 dati su hronološki prikazi korišćenih nizova.

### 2.2 Model godišnje koincidencije protoka na dve ili tri reke

Za proračun koincidencije tj. istovremene pojave velikih voda na dve susedne reke koriste se dvodimenzionalne (2D) raspodele verovatnoće. U opštem slučaju 2D raspodela dve slučajne promenljive  $X$  i  $Y$  definisana je njihovom zajedničkom raspodelom

$$F_{X,Y}(a,b) = P\{X \leq a, Y \leq b\} = \int_{-\infty}^a \int_{-\infty}^b f_{X,Y}(x,y) dx dy \tag{1}$$



Slika 2. Hronološki nizovi maksimalnih godišnjih protoka Dunava kod Bogoeva, Tise kod Sente i Save kod Sremske Mitrovice.

gde je  $f_{X,Y}(x,y)$  2D gustina raspodele, a  $a$  i  $b$  proizvoljne vrednosti dve slučajne promenljive. Marginalne raspodele se definišu kao

$$\begin{aligned} F_X(a) &= F_{X,Y}(a, \infty) = P\{X \leq a\}, \\ F_Y(b) &= F_{X,Y}(\infty, b) = P\{Y \leq b\} \end{aligned} \quad (2)$$

Verovatnoća istovremenog prevazilaženja izabranih vrednosti dve slučajne promenljive jednaka je:

$$\begin{aligned} L(a,b) &= P\{X > a, Y > b\} = \int_a^\infty \int_b^\infty f_{X,Y}(x,y) dx dy = \\ &= F_{X,Y}(a,b) - F_X(a) - F_Y(b) + 1 \end{aligned} \quad (3)$$

Definisanje 2D raspodele je moguće ako se definišu odgovarajuće marginalne jednodimenzionalne raspodele. S obzirom da je cilj da se odredi 2D raspodela normalnog tipa, marginalne raspodele se traže među odgovarajućim tipovima, a ne u širem izboru raspodela. Za model 2D normalne raspodele, marginalne raspodele mogu da budu one koje se transformacijom mogu svesti na normalne, a to su dvo- i troparametarska log-normalna raspodela (u daljem tekstu LN2 i LN3 raspodela). Druge vrste transformacija su moguće, ali nisu razmatrane.

U opštem slučaju, promenljiva (protok  $Q$ ) koja prati raspodelu LN3 svodi se na normalnu raspodelu pomoću transformacije

$$X = \ln(Q - c_x) \quad (4)$$

gde je  $c_x$  jedan od parametara LN3 raspodele. Promenljiva  $X$  prati normalnu raspodelu sa srednjom vrednošću  $m_x$  i standardnom devijacijom  $s_x$ . Tri parametra LN3 raspodele su tada  $(m_x, s_x, c_x)$ . Kada je  $c_x = 0$ , LN3 raspodela se svodi na LN2 raspodelu.

Dvodimenzionalna normalna raspodela normalizovanih protoka  $X$  i  $Y$  definisana je gustinom:

$$\begin{aligned} f_{X,Y}(x,y) &= \frac{1}{2\pi s_x s_y \sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \cdot \right. \\ &\cdot \left. \left[ \left(\frac{x-m_x}{s_x}\right)^2 - 2\rho \frac{x-m_x}{s_x} \frac{y-m_y}{s_y} + \left(\frac{y-m_y}{s_y}\right)^2 \right] \right\} \end{aligned} \quad (5)$$

gde su  $m_x, m_y, s_x, s_y$  srednje vrednosti i standardne devijacije dve promenljive, a  $\rho$  je koeficijent korelacije između dve slučajne promenljive. Standardizovanjem pro-

menljivih  $X$  i  $Y$  u odnosu na njihove srednje vrednosti i standardne devijacije dobija se standardizovana 2D normalna raspodela.

Od interesa su linije 2D kvantila, odnosno linije jednake verovatnoće istovremenog prevazilaženja. Ove linije spajaju korespondentne vrednosti dve promenljive sa verovatnoćom istovremenog prevazilaženja (koincidencije)  $L$ , definisane izrazom (3). Integracija funkcije gustine (5) u tu svrhu nije moguća analitički, pa se sprovodi numerički prema postupku koji su opisali Abramowitz i Stegun (1972).

Po analogiji sa 2D koincidencijom, za potrebe analize koincidencije velikih voda Dunava, Tise i Save u ovoj studiji korišćena je trodimenzionalna (3D) normalna raspodela. Izraz za gustinu ove raspodele i druge formule dali su Johnson i Kotz (1972), a ovde se ne prikazuju zbog obima. Cilj uspostavljanja ove 3D raspodele jeste da se sprovedu statističke simulacije korespondentnih protoka na tri razmatrane reke.

### 2.3. Raspodela zbira protoka dve reke

Ako je poznata 2D raspodela velikih voda dve reke, tada je moguće dobiti raspodelu njihovog zbira analitički ili numeričkom integracijom. Međutim, kako se u ovom radu primenjuje model normalne raspodele logaritamski transformisanih protoka  $X$  i  $Y$ , njihov zbir ne predstavlja i zbir protoka. Iz navedenog razloga, raspodela zbira protoka na dve pritoke:

$$Q_{nizv} = Q_1 + Q_2 \quad (6)$$

formira se simulacijama Monte Karlo iz poznate 2D normalne raspodele transformisanih protoka pritoka  $X$  i  $Y$ . Sa generisanim protocima na dve pritoke računa se zbir tj. nizvodni protok (6), a po završetku simulacije određuje se raspodela nizvodnih protoka poznatim metodama. U ovom radu je usvojena LN3 raspodela kao raspodela nizvodnog protoka Dunava i Tise, kako bi se omogućio dalji proračun koincidencije sa Savom pomoću 3D modela.

### 2.4. Generisanje korespondentnih protoka na tri reke

Postupak generisanja iz 3D normalne raspodele sastoji se od tri koraka (Kottegoda i Rosso, 2008):

- 1) generisanje niza jedne promenljive iz njene marginalne raspodele,
- 2) generisanje niza druge promenljive iz uslovne raspodele u odnosu na prvu promenljivu,

3) generisanje niza treće promenljive iz uslovne raspodele u odnosu na prvu i drugu promenljivu.

Postupak se zasniva na razbijanju 3D raspodele na uslovne i marginalne raspodele:

$$F_{X,Y,Z}(x, y, z) = F_{Z|X,Y}(z | x, y) \cdot F_{Y|X}(y | x) \cdot F_X(x) \quad (7)$$

Uslovna raspodela promenljive  $Y$  za fiksiranu vrednost  $X = x$  je normalna raspodela sa srednjom vrednošću i standardnom devijacijom

$$\begin{aligned} m_{Y|X}(x) &= \beta_0 + \beta_1 x \\ s_{Y|X}(x) &= s_y \sqrt{1 - \rho_{xy}^2} \end{aligned} \quad (8)$$

gde su  $\beta_0$  i  $\beta_1$  regresioni koeficijenti u regresionoj jednačini  $Y = \beta_0 + \beta_1 X$ . Uslovna raspodela promenljive  $Z$  u odnosu na  $X$  i  $Y$  takođe je normalna raspodela sa uslovnim momentima:

$$\begin{aligned} m_{Z|X,Y}(x, y) &= \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 y \\ s_{Z|X,Y} &= s_z \sqrt{1 - R_{z|x,y}^2} \end{aligned} \quad (9)$$

gde su  $\beta_0$ ,  $\beta_1$  i  $\beta_2$  regresioni koeficijenti u regresionoj jednačini  $Z = \beta_0 + \beta_1 X + \beta_2 Y$ , dok:

$$R_{z|x,y}^2 = \frac{\rho_{xz}^2 + \rho_{yz}^2 - 2\rho_{xy}\rho_{xz}\rho_{yz}}{1 - \rho_{xy}^2} \quad (10)$$

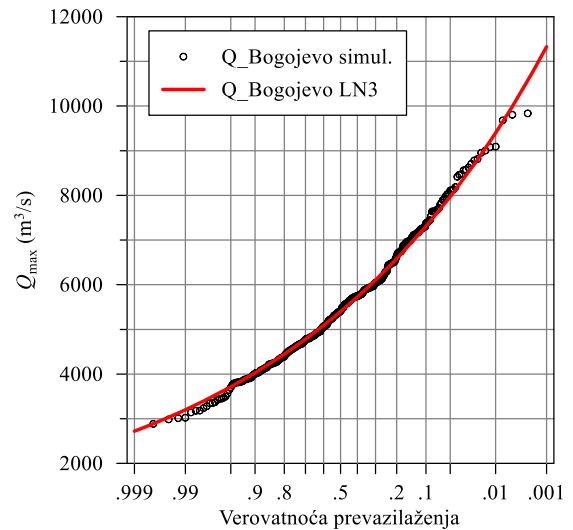
predstavlja korelacioni odnos (koeficijent determinacije) u istoj regresiji.

Postupak počinje generisanjem slučajnog broja  $x_0$  iz marginalne raspodele promenljive  $X \sim N(m_x, s_x)$ , zatim slučajnog broja  $y_0$  iz uslovne raspodele  $Y|X \sim N(m_{Y|X}(x_0), s_{Y|X})$  i na kraju slučajnog broja  $z_0$  iz uslovne raspodele  $Z|X,Y \sim N(m_{Z|X,Y}(x_0, y_0), s_{Z|X,Y})$ . Odgovarajući generisani protoci na tri reke su tada:

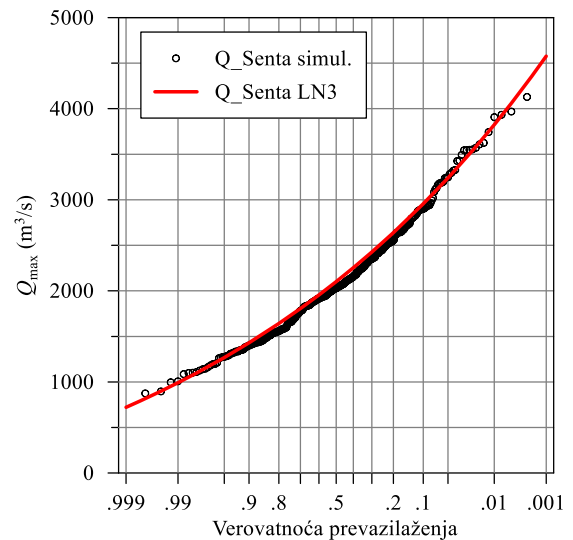
$$\begin{aligned} Q_{1,0} &= \exp(x_0) + c_x, & Q_{2,0} &= \exp(y_0) + c_y, \\ Q_{3,0} &= \exp(z_0) + c_z \end{aligned} \quad (11)$$

Slučajni brojevi iz normalne raspodele se dobijaju tako što se generišu slučajni brojevi iz uniformne raspodele na intervalu (0,1) koji predstavljaju verovatnoće, a do normalno raspoređenih slučajnih brojeva se dolazi određivanjem odgovarajućih kvantila iz normalne raspodele.

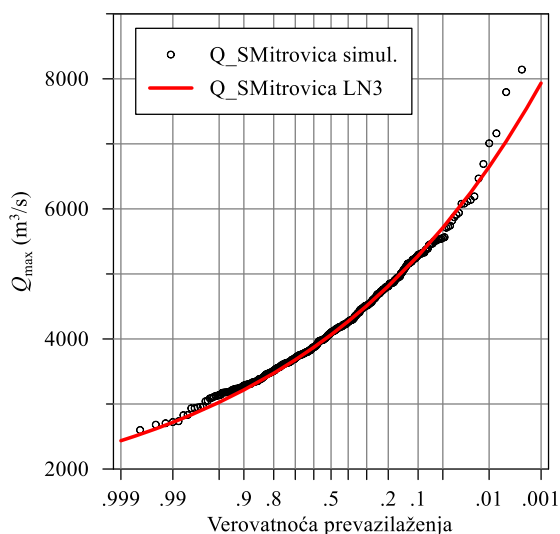
U ovom radu najpre su generisani slučajni protoci Dunava kod Bogojeva iz LN3 raspodele sa odgovarajućim parametrima. Zatim su generisani transformisani protoci Tise kod Sente iz uslovne raspodele ovih protoka u odnosu na Dunav kod Bogojeva, i na kraju transformisani protoci Save kod Sremske Mitrovice iz njihove uslovne raspodele u odnosu na Dunav i Sentu. Kada se završi generisanje transformisanih protoka, primenjuje se inverzna transformacija (11) i dobijaju se vrednosti korespondentnih protoka velikih voda na tri profila.



Slika 3. Empirijska raspodela generisanog niza na staciji Bogojevo na Dunavu i teorijska raspodela prilagođena osmotrenom nizu.



Slika 4. Empirijska raspodela generisanog niza na staciji Senta na Tisi i teorijska raspodela prilagođena osmotrenom nizu.



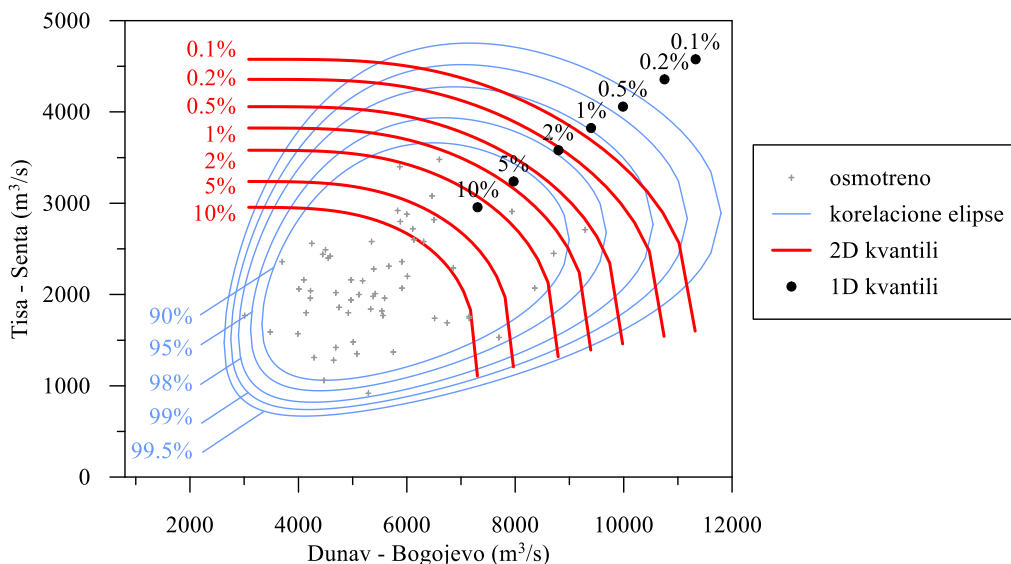
Slika 5. Empirijska raspodela generisanog niza na staciji Sremska Mitrovica na Savi i teorijska raspodela prilagođena osmotrenom nizu.

### 3. REZULTATI

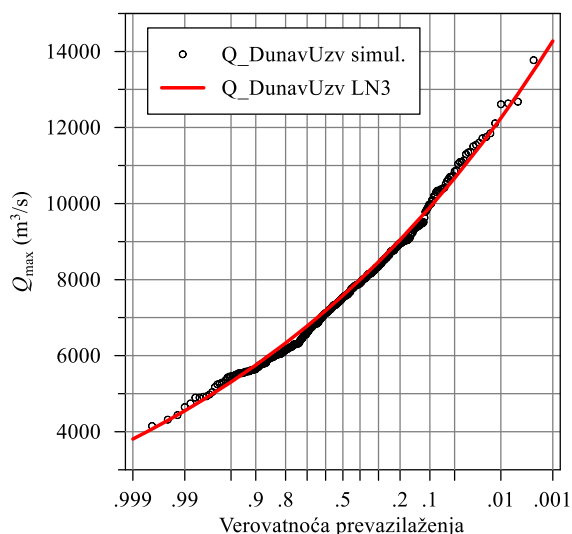
Monte-Karlo simulacije iz 3D troparametarske log-normalne raspodele su sprovedene do stabilizacije statistika niza (prva dva momenta, tj. aritmetičke sredine i standardne devijacije). U ovoj analizi generisan je niz od

400 protoka na tri profila. Za potrebe verifikacije, napravljeno je poređenje empirijskih raspodela simuliranih nizova sa teorijskim marginalnim raspodelama usvojenim na osnovu osmotrenih nizova. Generisani nizovi su saglasni sa usvojenim teorijskim raspodelama (slike 3, 4 i 5).

Na slici 6 prikazani su rezultati analize koincidencije maksimalnih godišnjih protoka Dunava kod Bogojeva i Tise kod Sente. Primenjena je 2D normalna raspodela na transformisane protoke prema izrazu (4). Na slici su prikazane korelacione elipse, koje obuhvataju oblasti u kojima se očekuje da se nađe  $p\%$  tačaka. Za analizu koincidencije od većeg značaja su linije jednake verovatnoće prevazilaženja, koje su na slici prikazane za verovatnoće od 10% do 0.1%. Svi parovi vrednosti protoka na ovim linijama imaju istu verovatnoću istovremenog prevazilaženja, pa su ove linije označene kao dvodimenzionalni (2D) kvantili. Poređenja radi, na slici su prikazani i jednodimenzionalni (1D) kvantili odnosno tačke koje spajaju kvantile iste verovatnoće prevazilaženja na dve stanice. Tako se, na primer, može videti da je verovatnoća istovremenog prevazilaženja 100-godišnje velike vode (tj. verovatnoće prevazilaženja 1%) na jednoj stanici i na drugoj stanici manja od 0.1%.



Slika 6. Dvodimenzionalna raspodela i koincidencija maksimalnih godišnjih protoka Dunava kod Bogojeva i Tise kod Sente.



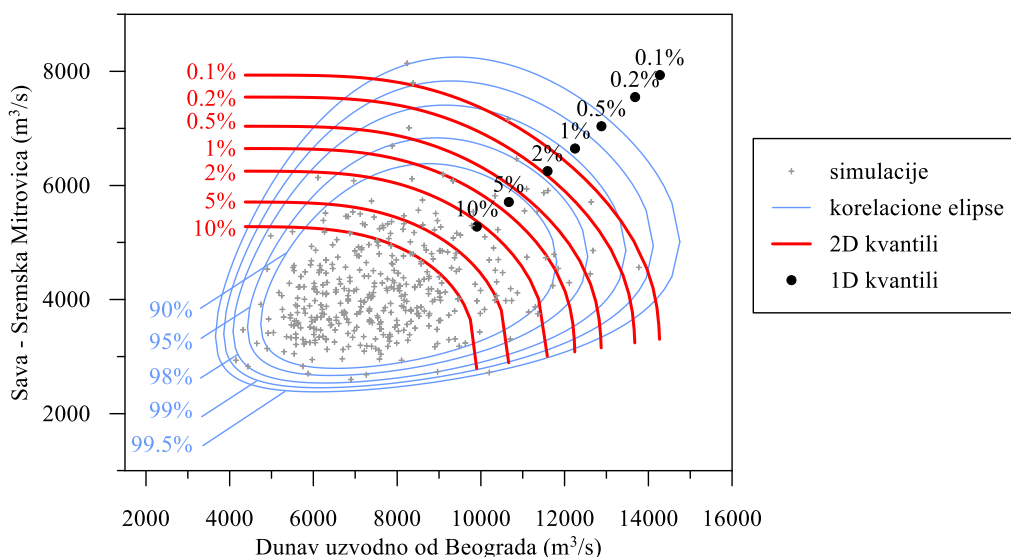
Slika 7. Raspedela zbirnog protoka Dunava i Tise kao raspredela maksimalnih godišnjih protoka Dunava uzvodno od Beograda.

Raspredela velikih voda nizvodno od ušća Tise, a uzvodno od Beograda, dobijena je kao raspredela zbira velikih voda Dunava i Tise. Korespondentni protoci Dunava i Tise dobijeni su kao deo rezultata Monte Karlo simulacija iz trodimenzionalne raspredele velikih voda Dunava kod Bogojeva, Tise kod Sente i Save kod Sremske Mitrovice, pri čemu su za ovaj zadatak korišćeni samo generisani nizovi protoka na Dunavu i Tisi. Sabiranjem simultano generisanih protoka na stanicima Bogojevo i Senta dobijen je niz protoka na Dunavu nizvodno od uš-

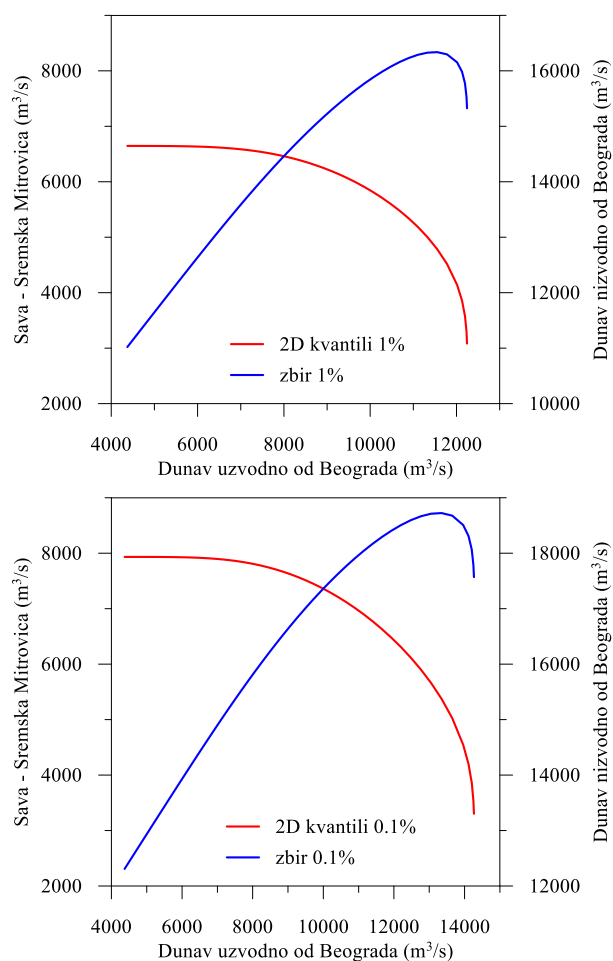
ća Tise, za koji je urađena statistička analiza. Usvojena je raspredela LN3 sa parametrima određenim metodom momenata. Rezultati su prikazani na slici 7.

Analiza koincidencije protoka velikih voda Dunava i Save kod Beograda sprovedena je po istoj metodologiji kao i za Dunav i Tisu. U ovom slučaju, prva ulazna promenljiva je definisana raspredelom maksimalnih godišnjih protoka uzvodno od Beograda, dobijenom generisanjem iz 2D raspredele velikih voda Dunava kod Bogojeva i Tise kod Sente. Drugu ulaznu promenljivu čine maksimalni godišnji protoci Save kod Beograda, koje opisuje raspredela LN3 sa parametrima ocenjenim efikasnom metodom (Kite, 1977). Primenjena je 2D normalna raspredela na transformisane protoke prema izrazu (4). Na slici 8 prikazani su rezultati analize koincidencije, uključujući korelacione elipse i linije 2D kvantila, tj. linije jednake verovatnoće istovremenog prevazilaženja protoka na dve lokacije. Na slici su prikazani i 1D kvantili (tačke koje spajaju kvantile iste verovatnoće prevazilaženja na dve lokacije).

Na slici 9 prikazani su rezultati za verovatnoće godišnjih koincidencija velikih voda Dunava i Save od 1% i 0.1% (što bi se moglo okarakterisati kao 2D povratni period od 100 i 1000 godina). Sa ovih slika se može videti za koje se kombinacije protoka na Savi i Dunavu uzvodno od ušća ostvaruju pojedini protoci na Dunavu nizvodno od ušća.



Slika 8. Dvdimenzionalna raspredela i koincidencija maksimalnih godišnjih protoka Dunava uzvodno od Beograda i Save kod Sremske Mitrovice.



Slika 9. Maksimalni godišnji protoci Dunava uzvodno i Save (2D kvantili) zajedničke verovatnoće prevazilaženja 1% (gore) i 0.1% (dole) i odgovarajući zbirni protok Dunava nizvodno od Beograda (plava linija).

#### 4. DISKUSIJA I ZAKLJUČAK

Prikazana analiza koincidencije velikih voda Dunava i Save u zoni Beograda urađena je na specifičan način zbog činjenice da se protoci na Dunavu neposredno uzvodno od Beograda ne mere. Kada bi se ovi protoci merili, analiza bi bila jednostavnija jer bi se svela na analizu dvodimenzionalne raspodele protoka velikih voda Dunava i Save. U nedostatku merenja na Dunavu uzvodno od ušća Save, verovatnoća pojave velikih voda Dunava na ušću Save mora se proceniti na osnovu koincidencije velikih voda Dunava i Tise.

Prikazana analiza uzima u obzir koincidenciju godišnjih maksimuma protoka na razmatranim rekama i profilima. Analiza je zasnovana na nizovima godišnjih maksimuma na izabranim profilima bez razmatranja datuma njihove pojave. Na taj način, prikazani rezultati se odnose na pojavu naznačenih vrednosti maksimalnih protoka u istoj godini, ali ne obavezno i istovremeno tj. istog ili bliskog datuma. Sa te tačke gledišta, prikazani rezultati možda precenjuju realni rizik od istovremene pojave velikih voda na Dunavu, Tisi i Savi. Za potpuno realističnu procenu koincidencije velikih voda na ove tri reke, bilo bi neophodno analizirati istovremene pojave velikih voda na slivovima sve tri reke. Takva analiza zahteva veoma pažljivu pripremu podataka, jer se za tako velike slivne površine (88000 km<sup>2</sup> sliva Save do Sremske Mitrovice, 140000 km<sup>2</sup> sliva Tise do Sente i 250000 km<sup>2</sup> sliva Dunava do Bogojeva) mora pouzdano utvrditi koje velike vode potiču od istih meteoroloških događaja. Obim takve analize je prevazilazio ograničenja projekta u okviru kog je ovaj rad nastao, pa nije sprovedena. Takođe, za potrebe projektovanja, prikazani rezultati su svakako na strani sigurnosti i kao takvi daju solidnu inženjersku podlogu za dalje analize, proračune i projektovanje.

#### ZAHVALNOST

Rad je nastao u okviru projekta „Obaloutvrde reke Dunav i reke Save na širem području ušća Save u Dunav“ koji je finansirala Direkcija za građevinsko zemljište i izgradnju grada Beograda, dok su sprovedena istraživanja deo projekta tehnološkog razvoja TR 37010 kod Ministarstva prosvete, nauke i tehnološkog razvoja pod nazivom „Sistemi za odvođenje kišnih voda kao deo urbane i saobraćajne infrastrukture“. Autori se zahvaljuju Republičkom hidrometeorološkom zavodu Srbije na stavljanju podataka za istraživanje na raspolaganje i kolegama Slavimiru Stevanoviću, Srđanu Marjanoviću i Bojanu Palmaru na korisnim diskusijama tokom izrade studije.

#### LITERATURA

- [1] Abramowitz M., Stegun I.A. (1972) *Handbook of mathematical functions*, 10<sup>th</sup> printing, Dover Publications, New York.
- [2] Blagojević B., Mihailović V., Plavšić J. (2014) Statistička analiza velikih voda na profilima hidroloških stanica: potreba za promenom pristupa, *Vodoprivreda* 46: 267-272.
- [3] Hidrozavod DTD i Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu (2017) Obaloutvrde reke Dunav i



- reke Save na širem području ušća Save u Dunav, Hidrološko-hidraulička studija.
- [4] Johnson N.L., Kotz S. (1972) *Distributions in Statistics: Continuous Multivariate Distributions*, John Wiley and Sons, Inc.
- [5] Karmakar S., Simonovic S. (2009) Bivariate flood frequency analysis. Part 2: a copula-based approach with mixed marginal distributions. *Journal of Flood Risk Management*, 2: 32–44.
- [6] Kite G.W. (1977) *Frequency and risk analyses in hydrology*. Water Resources Publications, Fort Collins, Colorado.
- [7] Kottegoda N.T., Rosso R. (2008) *Applied statistics for civil and environmental engineers*, Blackwell Publishing.
- [8] Plavšić, J. (2006) Neizvesnosti u analizi velikih voda metodom parcijalnih serija, *Vodoprivreda*, br. 219-221, 38 (1-3), str. 41-50.
- [9] Prohaska S., Ilić A. (2010) Nova metoda za definisanje višestruke koincidencije poplavnih talasa na složenim rečnim sistemima, *Vodoprivreda*, 42: 125-135.
- [10] USACE (1993) *Hydrologic Frequency Analysis*, EM 1120-2-1415, US Army Corps of Engineers.
- [11] Wang C. (2016) A joint probability approach for coincidental flood frequency analysis at ungauged basin confluences. *Nat. Hazards*, 82: 1727-1741.
- [12] Wang Q.J. (2001) A Bayesian joint probability approach for flood record augmentation. *Water Resources Research*, 37(6): 1707-1712.

## STATISTICAL ANALYSIS OF FLOODS AT THE DANUBE AND SAVA CONFLUENCE AT BELGRADE

by

Jasna PLAVŠIĆ and Marko IVETIĆ  
University of Belgrade – Faculty of Civil Engineering

### Summary

The paper presents a methodology for analysis of the coincident annual maximum floods of the Danube and Sava Rivers at their confluence in Belgrade, as a part of the flood control project aimed to provide boundary conditions for the hydraulic modelling of the confluence sector. The Danube and Sava confluence is under backwater effect from the Iron Gate Reservoir. Estimating the probability of coincidence of floods at the Danube and Sava confluence is crucial for the efficient protection of Belgrade against floods because the Sava floods can have a significant contribution to the Danube floods. Due to the Iron Gate backwater effect, streamflow measurements are not performed systematically near the Danube and Sava confluence at Belgrade. Flood assessment has therefore to be based on the data recorded at upstream gauging stations. Particularly, the only useful flood flows measurement data on the Danube upstream of Belgrade are available at the Bogojevo gauging station, which is located upstream of the confluence of the Tisa River with the Danube. This

situation imposed that the design floods of the Danube immediately upstream of the Sava confluence should be estimated by considering coincident floods of the Danube at Bogojevo and of the Tisa River at Senta. The methodological approach in this paper has therefore included the establishment of a trivariate distribution of annual maximum floods of the Danube, the Tisa and the Sava rivers, based on the observed data. The identified trivariate distribution is then used in Monte Carlo experiments to simulate annual maxima of the Danube upstream of Tisa and of the Tisa, which were combined into the flood flows of the Danube upstream of Belgrade. This simulated flood series and the simulated Sava floods are then used for the assessment of the coincidence probability at the Danube and Sava confluence.

Key words: flood flows, statistical analysis, annual maximum flow, coincidence, bivariate distribution, trivariate distribution, design floods

Redigovano 12.10.2017.