

NUMERIČKA SIMULACIJA PROSTORNOG STRUJANJA NA PRELIVIMA

Miodrag JOVANOVIĆ
Univerzitet u Beogradu
Građevinski fakultet

REZIME

Ovaj rad se bavi ispitivanjem numeričke simulacije prostornih (3D) tokova, posebno onih sa nehidrostatičkim rasporedom pritiska. Opisani su teorijski principi rešavanja Navier-Stoksovih (Navier-Stokes) jednačina metodom konačnih elemenata. Pristup zasnovan na etapnom rešavanju osnovnih jednačina, koji je primenjen u poznatom softverskom sistemu Telemac3D, omogućava brz i veoma efikasan proračun prelivnih tokova sa nehidrostatičkim rasporedom pritiska. Metoda je ilustrovana rezultatima numeričke simulacije jednog laboratorijskog eksperimenta.

Ključne reči: Navier-Stoksove jednačine, prelivanje, metoda konačnih elemenata

1. UVOD

Prvi modeli prostornog (3D) strujanja, koji potiču iz sedamdesetih godina prošlog veka, razvijani su za potrebe analize strujanja u morima i okeanima. Modeli TRIM i Delft3D-flow, zasnovani na metodi konačnih razlika, tipični su primeri takvih modela. Poznati predstavnici modela koji su zasnovani na metodi konačnih elemenata su američki RMA10 i ADCIRC, kao i francuski Telemac3D.

Model Telemac3D je specifičan po tome što koristi pristup etapnog rešavanja osnovnih jednačina (eng. "fractional-step method"), što mu daje prednost u odnosu na druge modele u pogledu stabilnosti, tačnosti i brzine proračuna. Proračun se može sprovesti pod pretpostavkom hidrostatičkog ili nehidrostatičkog rasporeda pritiska [7,9]. U nastavku se najpre izlažu teorijske osnove modela Telemac3D, a zatim se na jednom konkretnom primeru prikazuju njegove performanse.

2. OSNOVNE JEDNAČINE

Prostorno (3D) strujanje opisuje se Navier-Stoksovim jednačinama održanja mase i količine kretanja:

$$\operatorname{div}(\vec{U}) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{U} \cdot \operatorname{grad}(u) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \operatorname{div}(v_i \operatorname{grad}(u)) + f_x \quad (2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \vec{U} \cdot \operatorname{grad}(v) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \operatorname{div}(v_i \operatorname{grad}(v)) + f_y \quad (3)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \vec{U} \cdot \operatorname{grad}(w) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + g + \operatorname{div}(v_i \operatorname{grad}(w)) + f_z, \quad (4)$$

gde je: t - vreme, (x, y, z) - prostorne koordinate, (u, v, w) - komponente brzine \vec{U} u pravcima (x, y, z) , p - pritisak, v_i - turbulentna viskoznost, ρ - gustina, g - gravitaciono ubrzanje, a (f_x, f_y, f_z) - izvorni članovi.

Uticaji trenja na dnu, vetra na površini, zapreminskih sila (centrifugalne, Coriolisove), kao i drugi uticaji (temperature, saliniteta itd.), obuhvataju se izvornim članovima. Za proračun transporta trasera, sistemu (1)-(4) predružuje se odgovarajuća transportna jednačina, a za finije modeliranje turbulencije toka, transportne jednačine turbulente kinetičke energije i brzine njene disipacije (model $k-\varepsilon$) [7, 11, 12, 13].

U slučaju da se zanemari vertikalna komponenta brzine, jednačina (4) se redukuje na običnu diferencijalnu jednačinu: $dp/dz = -\rho \cdot g$, čija integracija, uz uslov na površini Z_s : $p(Z_s) = p_{atm}$, daje izraz za hidrostatički raspored pritiska:

$$p \equiv p_h = p_{atm} + \rho \cdot g (Z_s - z). \quad (5)$$

Ova zavisnost podrazumeva da je gustina fluida konstanta.

U opštem slučaju, kada raspored pritiska nije hidrostatički, može se uvesti podela:

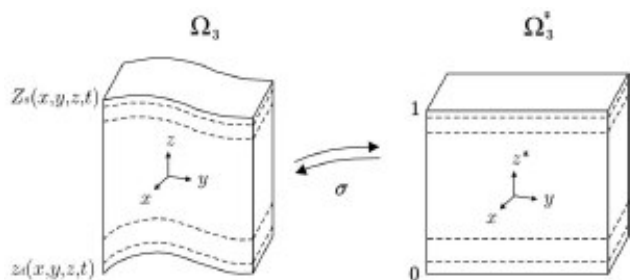
$$P = P_h + P_d, \tag{6}$$

gde je: p_h – hidrostatička komponenta, a p_d – odstupanje, ili “hidrodinamički pritisak” [9]. Shodno ovoj podeli, konceptualni pristup je da se strujno polje najpre sračuna pod pretpostavkom hidrostatičkog pritiska, a zatim koriguje za uticaj hidrodinamičkog pritiska, kao što će bit obrazloženo u nastavku.

3. DISKRETIZACIJA RAČUNSKE OBLASTI - SIGMA TRANSFORMACIJA

U metodi konačnih elemenata, najjednostavniji prostorni element je prizma trougaone osnove i vertikalnih stranica, sa ukupno 6 čvorova. Vertikalna projekcija prostorne (3D) računске mreže je 2D mreža trougaonih linearnih elemenata. To omogućava da se konstruisana 2D mreža kopira u viže ravni (slojeva) po vertikali, između čvrste konture i slobodne površine, tako da se lako može formirati 3D mreža od više slojeva prizmatičnih elemenata. S druge strane, ovaj pristup omogućava vezu između prostorog (3D) i ravanskog (2D) modela, što je (kao što će se pokazati) neophodno u algoritmu za rešavanje Navier-Stoksovih jednačina

Problem promenljivosti računskog domena u vertikalnom pravcu rešava se „sigma transformacijom“, odnosno uvođenjem „topografiji prilagodljivog koordinatnog sistema“ [3]. Nepravilna 3D fizička oblast (Ω_3) transformiše se u računsku oblast (Ω_3^*) pravilne konfiguracije (Slika 1).



Slika 1. Sigma transformacija

Sigma transformacija „prevodi“ sistem Dekartovih koordinata (x, y, z, t) u sistem „sigma“ koordinata (x^*, y^*, z^*, t) : $t^*=t, x^*=x, y^*=y, z^*=\sigma(x, y, z, t)$, pri čemu je vertikalna koordinata z^* definisana relativno u odnosu na dubinu,

pomoću neke neprekidne, monotono rastuće funkcije σ , na primer:

$$z^* = \sigma(x, y, z, t) = \frac{z - z_d(x, y, t)}{h(x, y, t)} \in (0, 1), \tag{7}$$

gde je: z_d – kota dna, a $h = Z_s - z_d$ – dubina.

Mreža u računskom domenu (Ω_3^*) sastoji se od više 2D mreža raspoređenih po vertikali. Odgovarajuća mreža u fizičkom domenu (Ω_3) definisana je u svakom vremenskom koraku pomoću diskretne transformacione funkcije: $z = z^* \cdot h + z_d$, što znači da se ova mreža pomera samo u vertikalnom pravcu. Kako je reč o afinoj transformaciji, relativno odstojanje ravni ostaje tokom proračuna uvek isto.

Korišćenje σ – koordinata omogućava tačno i „glatko“ definisanje granica na dnu i na površini u bilo kom vremenskom trenutku. Vrednosti $z^*=0$ na dnu i $z^*=1$ na površini su konstantne u prostoru i vremenu, što značajno olakšava zadavanje kinematičkih graničnih uslova.

Osnovne jednačine u referentnom domenu zahtevaju da se svi parcijalni izvodi definišu pomoću σ – koordinata (x, y, z^*) , što nije teško, jer su formule za metriku prelaza iz jednog sistema u drugi, jednostavne [7]:

$$\left. \begin{aligned} u^* &= \frac{dx^*}{dt} = \frac{dx}{dt} = u \\ v^* &= \frac{dy^*}{dt} = \frac{dy}{dt} = v \\ w^* &= \frac{dz^*}{dt} = \frac{\partial z^*}{\partial t} + u \frac{\partial z^*}{\partial x} + v \frac{\partial z^*}{\partial y} + w \cdot J^* \end{aligned} \right\} \tag{8}$$

gde je, u slučaju da se primeni klasična σ transformacija (7):

$J^* = \partial z^* / \partial z = h(x, y, t)$ - dubina, a u slučaju da se primeni „uopštena“ σ - transformacija:

$$z^* = \frac{z - z_{ip}}{z_{ip+1} - z_{ip}}, \tag{9}$$

veličina $J^* = \Delta z$ predstavlja vertikalno odstojanje između ravni „ i_p “ i „ i_{p+1} “ računске 3D mreže.

4. ETAPNO REŠAVANJE OSNOVNIH JEDNAČINA

Metoda etapnog rešavanja zasnovana je na razdvajanju diferencijalnih operatora u osnovnim jednačinama i sukcesivnom rešavanju odgovarajućih redukovanih jednačina koje opisuju pojedine fizičke procese, kao što su konvekcija (advекција) i difuzija. Ovakav pristup daje mogućnost da se u svakoj etapi primeni optimalni numerički postupak. Polazi se od dominantnog procesa – konvekcije, pa se najpre rešava konvektivno polje brzine, zatim se obavlja njegova korekcija zbog difuzionih uticaja i na kraju se, proračunom pritiska, uz uslov održanja mase, dolazi do konačnog polja brzine i dubine/kote nivoa.

Etapno rešavanje se može prikazati aproksimacijom izvoda po vremenu:

$$\frac{\partial f}{\partial t} \approx \frac{f^{k+1} - f^D}{\Delta t} + \frac{f^D - f^C}{\Delta t} + \frac{f^C - f^k}{\Delta t}, \quad (10)$$

gde je opšta promenljiva $f = \{h, u, v, w, \dots\}$, k – oznaka vremenskog nivoa, C – oznaka etape konvekcije, a D – oznaka etape difuzije.

Etapa I – konvekcija. Rešava se sistem:

$$\frac{\vec{U}^C - \vec{U}^k}{\Delta t} + \vec{U}^k \cdot \text{grad}(U^C) = 0, \quad (11)$$

gde je: $\vec{U}^C = \{u^C, v^C\}$ – konvektivno („privremeno“) polje brzine, $\vec{U}^k = \{u^k, v^k\}$ – poznato polje brzine iz prethodnog trenutka (t^k), a Δt – računski korak, koji u proračunu neustaljenog tečenja predstavlja vremenski interval, a u proračunu ustaljenog tečenja, algoritamski korak. Za numeričko rešavanje sistema (11) najčešće se koristi metoda karakteristika, kao jedna od najboljih metoda za rešavanje hiperboličkih problema [5, 11]. Konvektivne brzine se računaju u čvorovima svake ravni referentne σ mreže. Vertikalna komponenta brzine će se kasnije odrediti iz jednačine konituiteta.

Etapa II – difuzija+izvorni članovi. Rešenjem sistema:

$$\left. \begin{aligned} \frac{u^D - u^C}{\Delta t} &= \text{div}(v_i \cdot \text{grad}(u)) + f_x \\ \frac{v^D - v^C}{\Delta t} &= \text{div}(v_i \cdot \text{grad}(v)) + f_y \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

u 3D mreži, dobijaju se vrednosti korigovanih brzina u^D, v^D .

Ovu etapu karakteriše niz numeričkih specifičnosti¹. U proračunu difuzionih članova, vrednosti difuzionog koeficijenta u ravnima 3D mreže određuju se interpolacijom, na osnovu nekog usvojenog teorijskog rasporeda $v_i(z)$ (para-boličnog, parabolično-konstantnog itd.).

Najznačajniji izvorni član je trenje. Može se definisati nekim od empirijskih zakona (Manningovim, Chézyjevim, Strick-lerovim), sa brzinom koja je osrednjena po dubini toka. Alternativno, ako se pretpostavi da je raspored brzine po dubini logaritamski i da je dno „hidraulički rapavo“, tangencijalni napon na dnu se može sračunati pomoću lokalnih brzina u ravni najbližoj dnu i relativne rapavosti $\Delta z^{(1)} / k_s$, gde je $\Delta z^{(1)}$ – odstojanje ravni od dna, a k_s – apsolutna rapavost [7].

Etapa III – pritisak+kontinuitet. Jednačine u ovoj etapi su:

$$\left. \begin{aligned} \frac{u^{k+1} - u^D}{\Delta t} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_h}{\partial x} \equiv -g \frac{\partial Z_s}{\partial x} \\ \frac{v^{k+1} - v^D}{\Delta t} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_h}{\partial y} \equiv -g \frac{\partial Z_s}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Ovaj sistem se ne može direktno rešavati, jer su na desnoj strani jednačina nepoznati gradijenti nivoa. Zbog toga se uvode po dubini osrednjene brzine:

$$\bar{u}^D(x, y, t) = \frac{1}{h} \int_{z_d}^{z_s} u^D(x, y, z, t) dz; \quad \bar{v}^D(x, y, t) = \frac{1}{h} \int_{z_d}^{z_s} v^D(x, y, z, t) dz, \quad (14)$$

pri čemu se integral rešava numerički – trapeznim pravilom. Dobijaju se redukovane St. Venantove jednačine (bez konvekcije i difuzije):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\bar{u}^{k+1} - \bar{u}^D}{\Delta t} &= -g \frac{\partial Z_s}{\partial x} \\ \frac{\bar{v}^{k+1} - \bar{v}^D}{\Delta t} &= -g \frac{\partial Z_s}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

¹ Na primer, zbog složenosti σ -transformacije difuzionih čla-nova, proračun se obavlja u mreži fizičkog domena. Svaki prizmatični element dekomponuje se u 3 tetraedra, da bi se u proračunu Jakobijana mogla primeniti linearna interpolacija, što povećava obim proračuna pri formiranju elementarnih matrica u metodi konačnih elemenata [7].

Rešenje ovog sistema su *po dubini osrednjene* brzine:
 $\vec{u}^{k+1}, \vec{v}^{k+1}$.

Poredjenjem (13) i (15), može se konstatovati da je:

$$\left. \begin{aligned} \frac{u^{k+1} - u^D}{\Delta t} &= \frac{\tilde{u}^{k+1} - \tilde{u}^D}{\Delta t} \\ \frac{v^{k+1} - v^D}{\Delta t} &= \frac{\tilde{v}^{k+1} - \tilde{v}^D}{\Delta t} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

odakle se mogu sračunati nepoznate horizontalne komponente brzine:

$$u^{k+1} = \tilde{u}^{k+1} - \tilde{u}^D + u^D; v^{k+1} = \tilde{v}^{k+1} - \tilde{v}^D + v^D. \quad (17)$$

Dubine h^{k+1} se dobijaju iz jednačine kontinuiteta:

$$\frac{h^{k+1} - h^k}{\Delta t} + \frac{\partial(h\tilde{u}^{k+1})}{\partial x} + \frac{\partial(h\tilde{v}^{k+1})}{\partial y} = 0. \quad (18)$$

Na osnovu sračunatih dubina (odnosno odgovarajućih kota nivoa) koriguju se vertikalne koordinate čvorova računске mreže. Vertikalna komponenta brzine w^{k+1} se određuje u σ domenu:

$$w^* = \frac{dz^*}{dt} = \frac{\partial z^*}{\partial t} + u^{k+1} \frac{\partial z^*}{\partial x} + v^{k+1} \frac{\partial z^*}{\partial y} + w^k \Delta z. \quad (19)$$

Ako se pretpostavi hidrostatički raspored pritiska, veličine $\vec{u}^{k+1} = \{u^{k+1}, v^{k+1}, w^{k+1}\}$ i h^{k+1} predstavljaju konačno rešenje i može se proračunom preći na sledeći vremenski nivo.

Ako raspored pritiska nije hidrostatički, sračunate vrednosti su samo privremene i podložne su naknadnoj korekciji. Zato će se prethodno sračunate veličine obeležiti: $\vec{U}^{hid} = \{u^{hid}, v^{hid}\}$ (gde oznaka „hid” sugeriše atribut „hidrostatički”), a u Etapu III će se uvesti dopunski korak vezan za uključenje dinamičke komponente pritiska [9]:

$$\frac{\vec{U}^{k+1} - \vec{U}^{hid}}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho} \text{grad}(p_d),$$

odnosno,

$$\vec{U}^{k+1} = \vec{U}^{hid} - \frac{\Delta t}{\rho} \text{grad}(p_d). \quad (20)$$

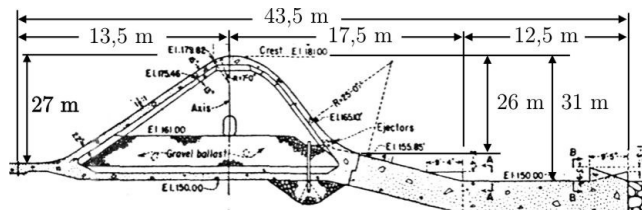
Kada se na obe strane jednačine (20) primeni operator divergencije, a imajući u vidu da shodno jednačini kontinuiteta mora biti: $\text{div}(\vec{U}^{k+1}) = 0$, dobija se Poissonova jednačina [9]:

$$\text{div}(\vec{U}^{hid}) = \text{div}\left(\frac{\Delta t}{\rho} \text{grad}(p_d)\right), \quad (21)$$

čije rešenje daje raspored komponente pritiska p_d . Na osno-vu tog rasporeda, mogu se, rešavanjem sistema (20), odrediti horizontalne komponente brzine u^{k+1}, v^{k+1} , dok se vertikalna komponenta w^{k+1} dobija numeričkim rešavanjem jednačine (4).

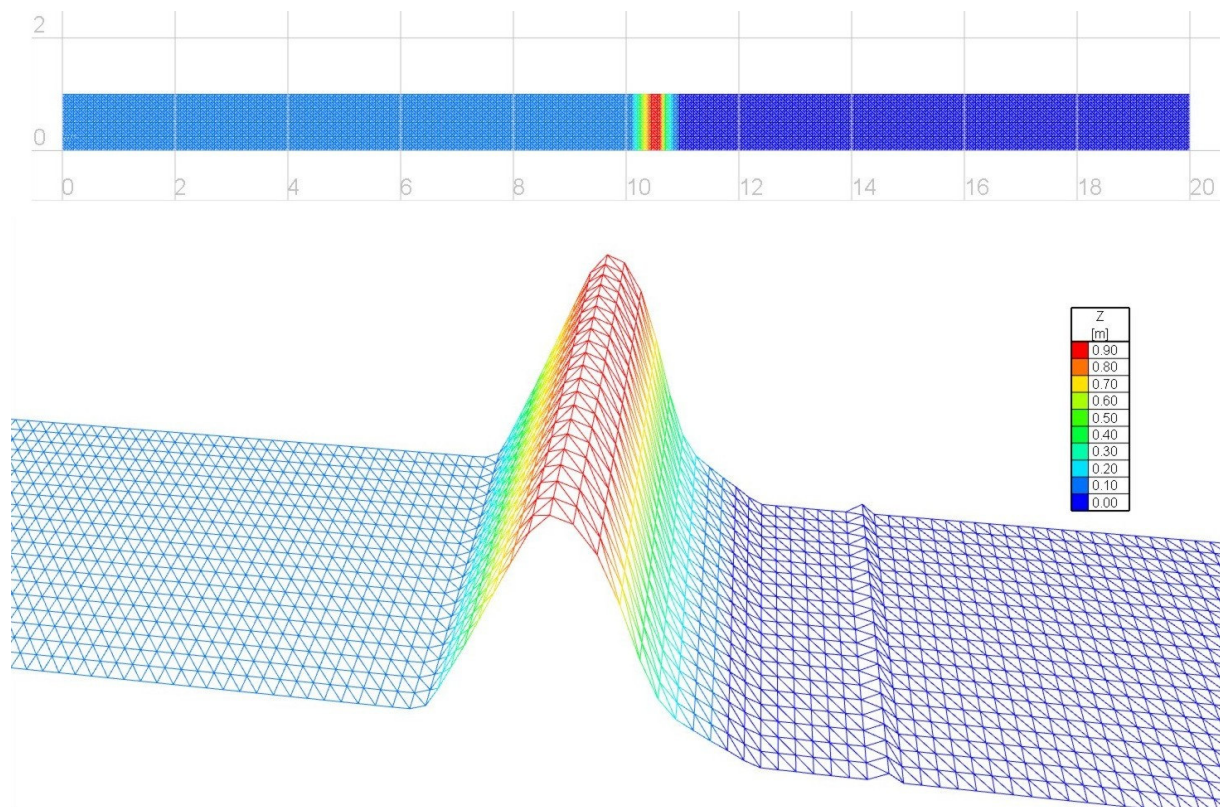
5. TEST PRIMER

Na Slici 2 prikazan poprečni presek Brane Imperial u SAD, čija su modelska ispitivanja poslužila za proveru proračuna preliivanja pomoću modela Telemac3D. Prelivna polja brane Imperial projektovana su na osnovu laboratorijskog ispiti-vanja na fizičkom modelu u razmeri 1:30 [2]. U ovom primeru korišćeni su rezultati merenja pri jediničnom protoku $q = 0,0635 \text{ m}^2/\text{s}$.



Slika 2. Poprečni presek preliiva brane Imperial na reci Colorado u SAD; ova brana, dužine 1059 m i najveće visine 31 m, završena je 1938. godine, obezbeđujući akumulaciju zapremine $2 \times 10^6 \text{ m}^3$ za potrebe navodnjavanja [2].

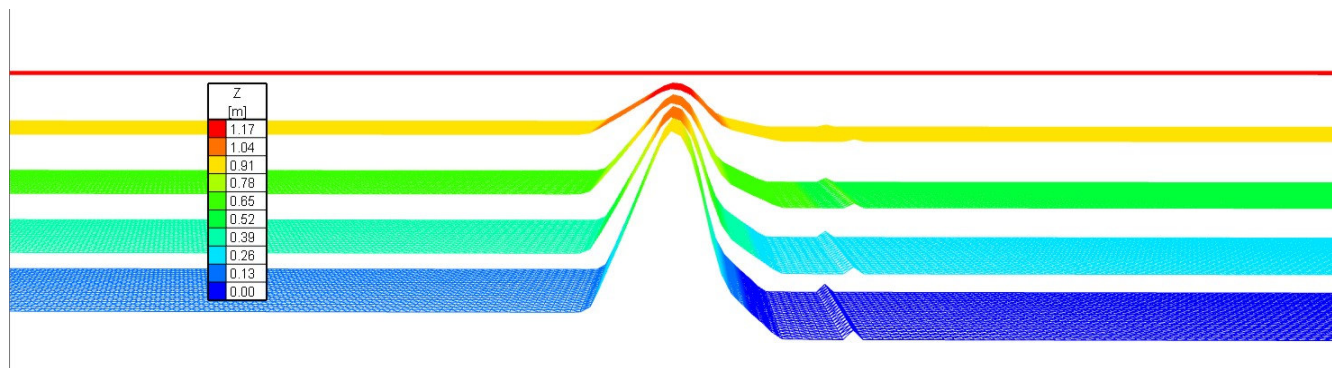
Računski domen je horizontalni kanal širine 1 m i dužine 20 m, sa *modelom* brane na sredini kanala (Slika 3).



Slika 3. Računski domen i osnovna mreža konačnih elemenata.

Osnovna računaska 2D mreža, koja se sastoji od 16000 trougaona elemenata (8421 čvor), kopirana je u još 4 ravni po vertikali, koje su na jednakom međusobnom odstojanju (Slika 4). To znači da se prostorna 3D mreža sastoji od ukupno pet 2D mreža po vertikali, odnosno da ima 4 sloja prizmatičnih elemenata po dubini.

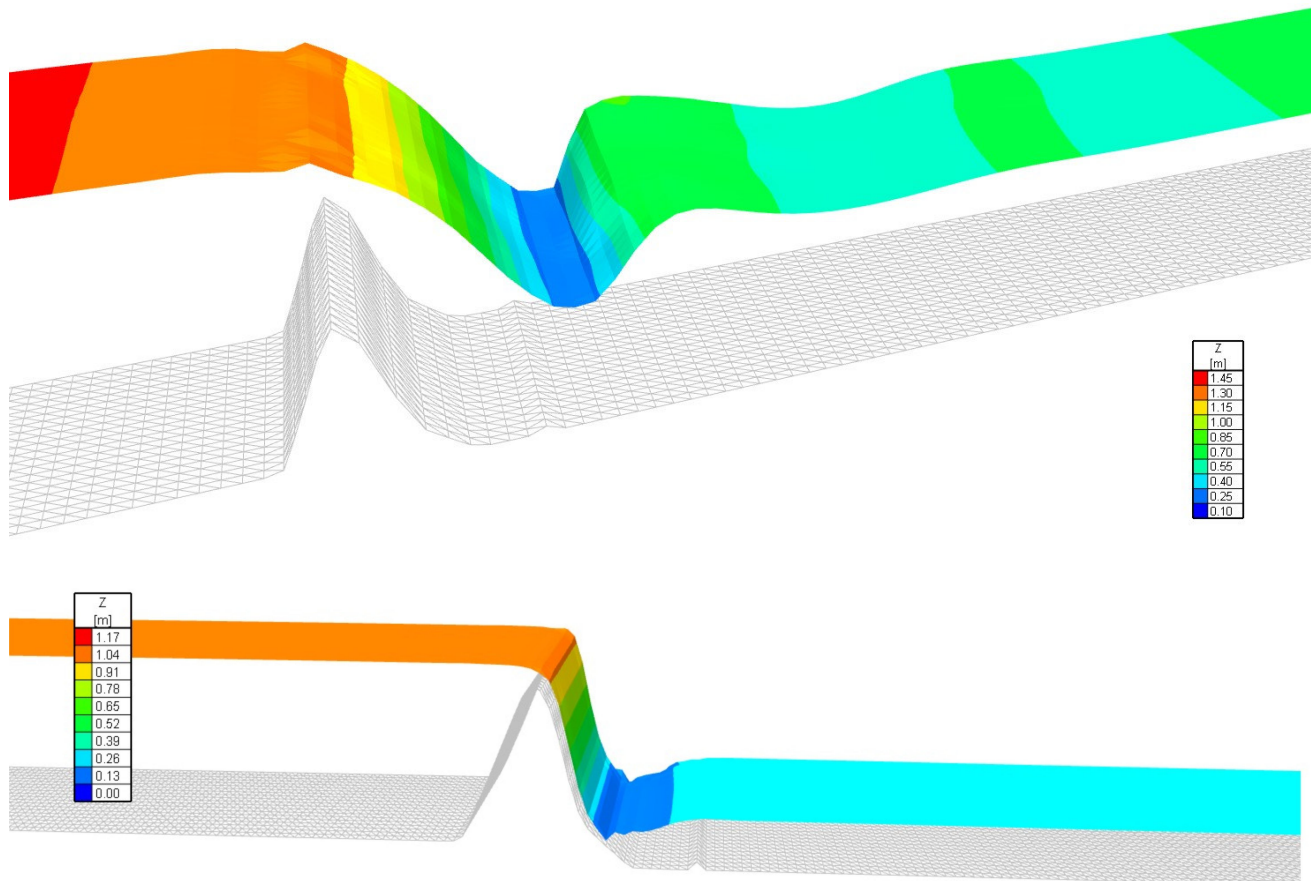
Početni uslov podrazumeva da je linija nivoa horizontalna. Računato je ustaljeno tečenje, tako da je uzvodni granični uslov definisan konstantnim protokom $q = 0,0635 \text{ m}^2/\text{s}$, a nizvodni granični uslov, odgovarajućom kotom, odnosno dubinom $h = 0,3 \text{ m}$.



Slika 4. Početno stanje za proračun je zadato horizontalnom linijom nivoa, 3 m iznad dna kanala (oko 0.3 m iznad krune preliva).

Proračun, obavljen sa korakom $\Delta t = 0,01$ s, trajao je 50 s (5000 računskih koraka), a ustaljeno stanje je praktično dostiguto već posle 15 s. U periodu konvergencije ka ustaljenom stanju, nivo u kanalu je imao oblik pokretnog hidrauličkog skoka (Slika 5).

Po dostizanju ustaljenog stanja, nivo se „smirio” i u podnožju brane je ostao stabilan „navučeni” skok (Slika 5). U toku proračuna nije bilo znakova numeričke nestabilnosti, iako se na prelivu računске ravni koncentrišu unutar veoma tankog prelivnog mlaza.



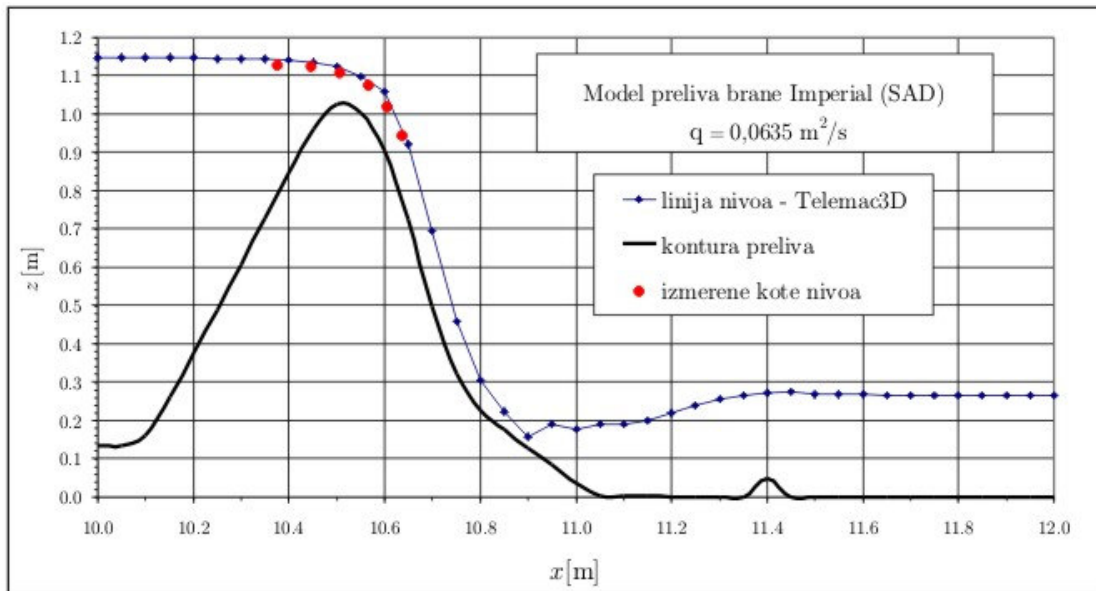
Slika 5. Linija nivoa u fazi pomeranja hidrauličkog skoka (gore) i linija nivoa po dostizanju ustaljenog stanja (dole).

Pokazalo se da rapavost ne utiče bitno na rezultate proračuna; vrednosti Manningovog koeficijenta $n = 0,020 - 0,035 \text{ m}^{-1/3} \text{ s}$ su dale skoro istovetne rezultate, što se može tumačiti time da su kod preliivanja inercijalni uticaji dominantni u odnosu na uticaje trenja. Svi proračuni su obavljeni sa standardnim $k-\epsilon$ modelom turbulencije [7, 11, 12, 13]. Na Slici 6 prikazan je uzdužni profil sračunatih i izmerenih nivoa. Može se konstatovati veoma dobro slaganje.

Vrednost koeficijenta protoka:

$$C_Q = \frac{q}{\sqrt{2g} H^{3/2}} \quad (22)$$

iznosi 0,46 sa izmerenom visinom prelivnog mlaza H , a 0,43 sa sračunatom visinom H . Razlika je 6,5%. Ovi rezultati su u saglasnosti sa nekim ranijim proračunima [10].



Slika 6. Poređenje rezultata proračuna i merenja.

Na Slici 7 dati su rezultati proračuna u krupnijem planu. Može se zapaziti da se pri površini strujnice međusobno približavaju, formirajući tanak prelivni sloj. U podnožju uzvodnog lica brane strujnice poniru ka dnu, formirajući recirkulaciono sekundarno strujanje. Nizvodno od preliva uočava se navučeni hidraulički skok, što potvrđuje da je slapište ove brane dobro projektovano. Najveće brzine na brzotoku iznose oko 2 m/s.

Raspored hidrodinamičkog pritiska pokazuje da se u gornjem delu preliva javlja odstupanje od hidrostatičkog pritiska, od $-0,005$ do $-0,02$ Pa, a u podnožju preliva, ispod hidrauličkog skoka, od $+0,005$ do $+0,03$ Pa. Iako se čini da su dobijene vrednosti realne, one nažalost nisu mogle biti potvrđene rezultatima laboratorijskih merenja.

6. ZAKLJUČCI

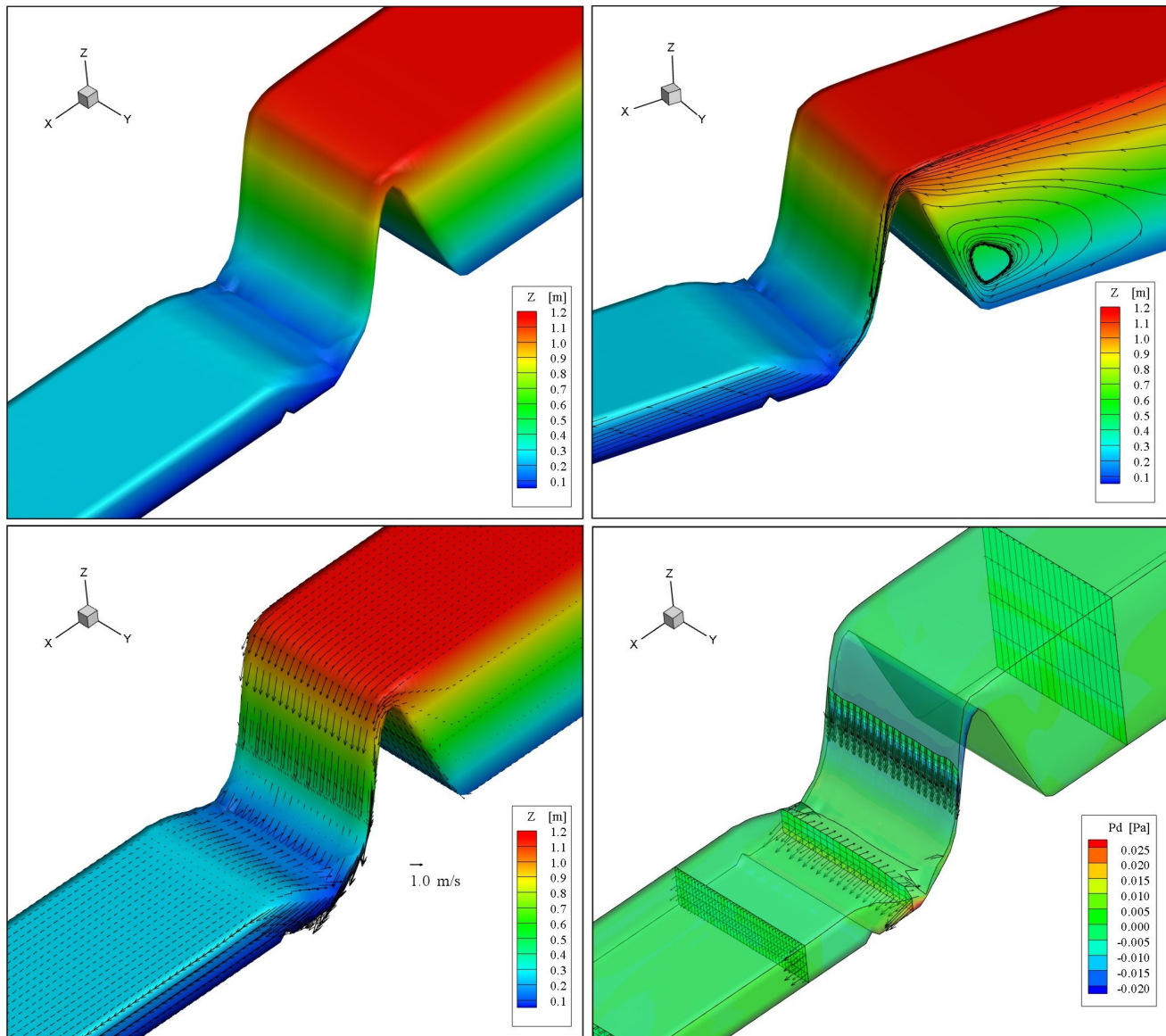
1. Metoda etapnog rešavanja zasnovana na razdvajanju diferencijalnih operatora, omogućava efikasno rešavanje Navier-Stokesovih jednačina sa nehidrostatičkim rasporedom pritiska.

Ova metoda, u kojoj se najpre rešava konvektivno polje brzine (hiperbolički problem), zatim difuzija (parabolični problem) i na kraju, Poissonova jednačina po pritisku (eliptični problem), omogućava da se u svakoj etapi koristi optimalni numerički postupak.

2. Primenom σ -transformacije, relativno lako se realizuje diskretizacija prostornog domena i omogućava kombinovanje ravanskog i prostornog modela. Naime, dubine (kote nivoa), računaju se rešavanjem jednačine kontinuiteta sa brzinama osrednjenim po dubini, što omogućava da se neki delovi modela Telemac2D iskoriste u rešavanju 3D problema.

3. Konceptualni pristup razdvajanja pritiska na hidrostatičku i nehidrostatičku komponentu, daje mogućnost stabilnog proračuna u numerički vrlo zahtevnim slučajevima, kao što je tečenje u vidu tankog prelivnog mlaza.

4. Dobro slaganje rezultata u test primeru potvrđuje valjanost metodologije ugrađene u sistem Telemac3D i preporučuje ga za korišćenje u praksi.



Slika 6. Rezultati proračuna ustaljenog prelivanja pri protoku $q = 0,0635 \text{ m}^2/\text{s}$;
gornji red: linija nivoa i strujnice; donji red: vektori brzine i raspored hidrodinamičkog pritiska.

LITERATURA

- [1] Baker, A.J., Finite Element Computational Fluid Dynamics, McGraw-Hill, New York, 1985.
- [2] Boulder Canyon Project Final Reports: Part VI – Hydraulic Investigation Bulletin 4: Model Studies of Imperial Dam, Desilting Works, All-American Canal

Structures, US Department of the Interior, Bureau of Reclamation, Denver, 1949.

- [3] Decoene, A., Gerbeau, J-F., Sigma transformation and ALE formulation for three-dimensional free surface flows, International Journal for Numerical Methods in Fluids 59, 4 (2009).

- [4] Dhatt, G., Touzot, G., Une présentation de la méthode des éléments finis, Maloine S.A., Paris, 1984.
- [5] Esposito, P., Résolution bidimensionnelle des équations de transport par la méthode des caractéristiques, EDF Report HE/41/81.16 1981.
- [6] Hervouet, J-M., Jankowski, J., Comparing numerical simulations of free surface flows using non-hydrostatic Navier-Stokes and Boussinesq equations, Proceedings of the 4th Conference on Hydroinformatics, Iowa City, Iowa, 2000.
- [7] Hervouet, J-M., Hydrodynamics of Free Surface Flows – modelling with the finite element method, Wiley, Chichester, England, 2007.
- [8] Hervouet, J-M., Razafindrakoto, E., The waver equation applied to the solution of Navier-Stokes equations in finite elements, WIT Transactions on the Built Environment, Vol. 78, WIT Press, Southampton, UK, 2005.
- [9] Jankowski, J., A non-hydrostatic model for free surface flows, Bericht Nr. 56/1999, Institut für Strömungsmechanik und Elektron, Rechnen im Bauwesen der Universität Hannover, Hannover, 1999.
- [10] Jovanović, M., Application of the Boundary Element Method for the Solution of Spillway Flows, BETECH'87, Rio de Janeiro, 1987.
- [11] Jovanović M. i dr., Analiza nekih uticaja na životnu sredinu izgradnje Mosta na Adi, Vodoprivreda 0360-0519, 44(2012) 258-260, p. 207-213, 2012.
- [12] Telemac Modelling System, Telemac3D Code V6.1 – Operating Manual, EDF-France, 2007.
- [13] Zindović, B. i dr. Numerička simulacija strujnog polja u blizini vodozahvata, Vodoprivreda 0350-0519, 42(2010) 246-248, p. 157-163, 2010.

NUMERICAL SIMULATION OF 3D SPILLWAY FLOWS

by

Miodrag JOVANOVIĆ
University of Belgrade, Serbia
Faculty of Civil Engineering

Summary

This article deals with the numerical solution of the Navier-Stokes equations, namely calculation of 3D flows over spillways of arbitrary shape. The theoretical background of the numerical solution, based on the finite element method (FEM) which is implemented in the software system Telemac3D, is presented. Non-hydrostatic Navier-Stokes

equations are solved by the fractional-step method. Results of numerical simulation of a laboratory experiment are presented for illustration purposes.

Key words: Navier-Stokes equations, 3D spillway flow, finite-element method

Redigovano 26.11.2013.