

## NUMERIČKO MODELIRANJE BRZOTOKA PRI PROMENI PRAVCA ZIDA KANALA

Mr Ljubomir BUDINSKI, dipl.inž.građ.  
Građevinski fakultet u Subotici, E-mail: ljubab@eunet.yu  
V.prof.dr. Ljubodrag SAVIĆ  
Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu

### REZIME

Razvijen je ravanski (2D) numerički model nejednolikog ustaljenog tečenja u brzotoku sa suženjem i proširenjem korita. Primenjene su metode *MacCormack* i *MUSCL*, poboljšane sa *TVD* članom. Dobijeni rezultati numeričkih modela su upoređeni sa analitičkim rešenjima.

**Ključne reči** : buran tok, poremećaji toka, kosi stojeći talas, ravanski modeli, numeričke metode.

### 1. UVOD

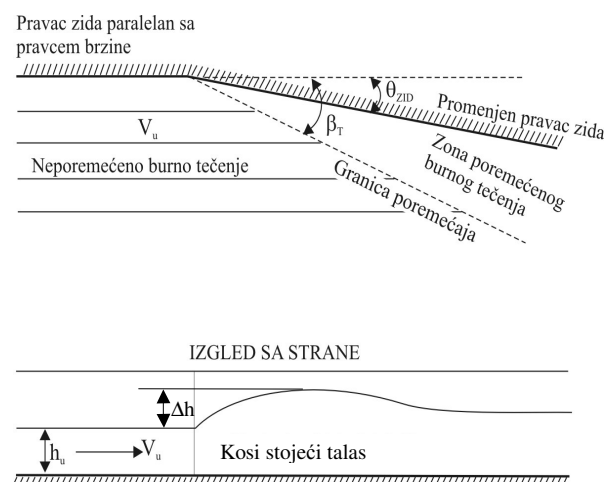
Uslovi tečenja u brzotoku sa neprizmatičnim koritom i horizontalnim krivinama trase nameću složenu strujnu sliku, koja se u proizvoljnom slučaju ne može ispravno opisati analitičkim rešenjem. Buran tok odlikuju nagle promene dubine usled promene geometrije korita – tzv. kosi stojeći talasi, koji se u međusobnim sudarima uvećavaju ili poništavaju. Pri projektovanju brzotoka je korisno da se ovakvo tečenje što potpunije sagleda – da se što tačnije proceni strujna slika. Savremena iskustva pokazuju da računске metode za modeliranje ravanskog (2D) *neustaljenog* tečenja sa strmim čelom (pre svega, proloma brana), dobro opisuju nagle promene toka, i ako se radi o prostornoj (3D) pojavi. Stoga su i u ovom radu primenjeni *ravanski* (2D) numerički modeli, zasnovani na Reynolds-ovim jednačinama, osrednjenim po dubini (pretpostavlja se hidrostatički raspored pritiska). Korišćene su metode *MacCormack* i *MUSCL*, koje se radi eliminisanja neželjenih numeričkih parazita, dopunjuju sa tzv. *TVD* (Total Variation Diminishing) članom.

Cilj istraživanja je da se razvije jednostavan računarski program (na pr. EXCEL ili MATLAB aplikacija) sposoban da opiše tečenje u brzotoku sa složenom geometrijom (neprizmatično korito i/ili horizontalna krivina u trasi). Kao prvi korak, ispitan je učinak

predloženih numeričkih metoda pri proračunu jednostavnih primera suženja i proširenja korita, za koje postoje „analitička“ rešenja. U radu su prvo prikazana neka od poznatih „analitičkih“ rešenja, a zatim matematički i numerički model na kome se zasniva proračun. Na kraju su rezultati dve predložene numeričke metode upoređeni međusobno, kao i sa analitičkim rešenjima, za nekoliko vrsta poremećaja.

### 2. ANALITIČKA REŠENJA

Skretanje burnog toka, usled skretanja (zakošenja) zida kanala u osnovi, izaziva pojavu kosih stojećih talasa. Osnovni elementi poremećaja prikazani su na Slici 1. Razmatra se horizontalni kanal pravougaonog poprečnog preseka. Obrazuju se dve oblasti, neporemećena i poremećena, odvojene granicom poremećaja (čelom talasa) koja seče tok pod uglom  $\beta_T$ . Promena količine kretanja u oblasti poremećaja ostvaruje se promenom sile pritiska, tj. promenom dubine,  $\Delta h$ .



Slika 1. Kosi stojeći talas u kanalu sa horizontalnim dnom

Ovakvo tečenje obrađivano je od strane dva istraživača, A.Ippen-a i B.Batinića, koji su, uz određene pretpostavke, izveli odgovarajuća analitička rešenja. U nastavku su, ukratko, opisana oba rešenja.

• **Analitičko rešenje IPPEN-a za naglo skretanje zida**

Ippen je svoje analitičko rešenje izveo pod sledećim pretpostavkama (Henderson, 1966):

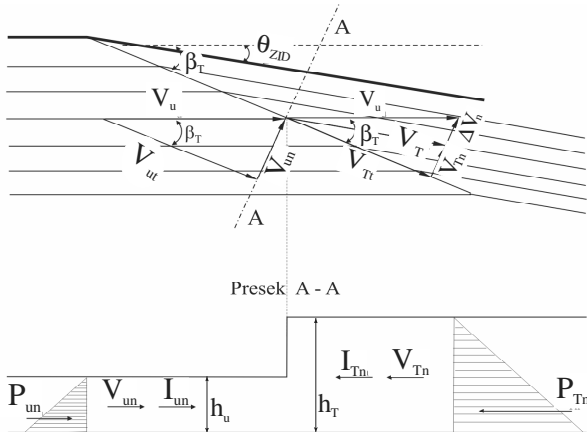
- za male uglove skretanja zida može se zanemariti vertikalno ubrzanje (sem gravitacionog), na osnovu čega se usvaja hidrostatički raspored pritiska;
- brzine su nepromenljive (konstantne) po vertikali ;
- zbog male dužine razmatrane deonice, sila trenja se može zanemariti;
- dno kanala je horizontalno.

Navedene pretpostavke određuju problem kao ravanski, pa se na osnovu šeme strujanja (Slika 2) mogu napisati izrazi za jednačinu kontinuiteta :

$$h_u \cdot V_{un} = h_T \cdot V_{Tn}, \quad (1)$$

i dinamičku jednačinu za pravac upravan na granicu poremećaja:

$$\frac{\gamma h_u^2}{2} + \frac{\gamma}{g} h_u V_{un}^2 = \frac{\gamma h_T^2}{2} + \frac{\gamma}{g} h_T V_{Tn}^2. \quad (2)$$



Slika 2. Šema strujanja

Kombinovanjem jednačina (1) i (2) dobija se izraz sličan vezi između dve spregnute dubine kod klasičnog hidrauličkog skoka :

$$\frac{h_T}{h_u} = \frac{1}{2} \left( \sqrt{1 + 8Fr_u \sin^2 \beta_T} - 1 \right), \quad (3)$$

gde je  $Fr_u = \frac{V_u^2}{gh_u}$ .

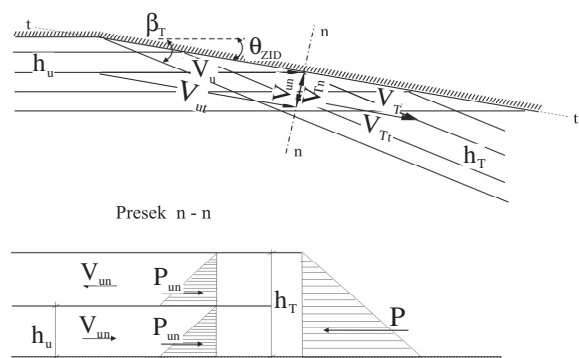
Ugao  $\beta_T$  računa se iz uslova jednakosti tangencijalnih brzina unutar poremećaja i izvan njega,  $V_{ui}=V_{Ti}$ , s obzirom da ne postoji sila koja deluje duž granice poremećaja :

$$tg \theta_{ZID} = \frac{\left( \frac{h_T}{h_u} - 1 \right) tg \beta_T}{\frac{h_T}{h_u} + tg^2 \beta_T}. \quad (4)$$

• **Analitičko rešenje Batinića za naglo skretanje zida**

Batinić (Batinić i Milanović, 1997) svoje rešenje zasniva na sledećim pretpostavkama (slika 3) :

- Neporemećeni dolazeći sloj dubine  $h_u$  i brzine  $V_u$  produžava sve do zida, gde uz zid skreće naviše, i obrazuje gornji (od zida odbijeni) sloj. Prema tome, poremećaji (za dolazeći sloj) počinju u dodiru sa zidom, a ne sa čelom talasa (kao kod Ippen-a) ;
- U gornjem sloju vlada brzina  $V_T$ , a strujanje je paralelno sa čelom talasa (a ne sa pravcem zida kao kod Ippen-a) ;
- Unutar oblasti poremećaja pritisci su raspoređeni hidrostatički i to: samo neposredno uz zid u jedinstvenom sloju, dok se dalje od zida raspoređuju za svaki sloj (gornji i donji) zasebno ;
- Zanemaruje se trenje po dnu kanala, jer se radi o kratkoj deonici, sa preovlađujućim uticajem sile pritiska na promenu količine kretanja ;
- Dno kanala je horizontalno.



Slika 3. Šema strujanja

Jednačina kontinuiteta je :

$$h_u \cdot V_{un} = (h_T - h_u) \cdot V_{Tn}, \quad (5)$$

a dinamička jednačina u pravcu n – n :

$$\frac{\gamma h_u^2}{2} + \frac{\gamma}{g} h_u V_{un}^2 + \frac{\gamma (h_T - h_u)^2}{2} + \frac{\gamma}{g} (h_T - h_u) V_{Tn}^2 = \frac{\gamma h_T^2}{2}. \quad (6)$$

Kombinacijom ove dve jednačine dobija se izraz koji po obliku odgovara Ippen-ovom rešenju (3) :

$$\frac{h_T}{h_u} = 1 + \frac{1}{2} Fr_u \sin^2 \theta_{ZID} + \sqrt{\left(1 + \frac{1}{2} Fr_u \sin^2 \theta_{ZID}\right)^2 - 1}. \quad (7)$$

Ukoliko se uzrok poremećaja smanjuje ( $\theta_{ZID} \rightarrow 0$ ), onda po Batinićevom rešenju (jed. 7), odnos dubina teži  $h_T/h_u \rightarrow 1$ , dok kod Ippen-ovog rešenja (jed. 3) ovaj odnos teži  $h_T/h_u \rightarrow 0$ , što je fizički nemoguće.

Postavljanjem jednačina za tangencijalni pravac ( $t - t$ , na Slici 3), dobija se izraz za ugao poremećaja,  $\beta_T$  :

$$\operatorname{tg} \beta_T = \frac{\frac{h_T}{h_u} \operatorname{tg} \theta_{ZID}}{\frac{h_T}{h_u} - 1 - \operatorname{tg}^2 \theta_{ZID}}. \quad (8)$$

#### • Krivolinijsko (postepeno) skretanje zida

Skretanje konture zida može biti i kontinualno – postepeno, duž glatke krivolinijske putanje – prelaznice (slika 4). Tada nastaju mali poremećaji, koji se mogu opisati eliminacijom odnosa  $V_u/V_T$  iz jednačine kontinuiteta (1), napisane u obliku :

$$V_u h_u \sin \beta_T = V_T h_T \sin (\beta_T - \theta_{ZID}), \quad (9)$$

koristeći jednakost tangencijalnih brzina  $V_u = V_T$ .

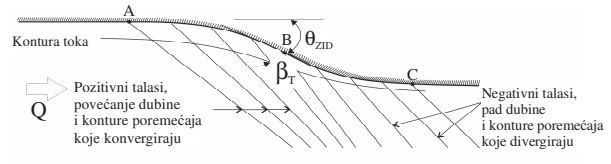
Kao rezultat dobija se izraz :

$$\frac{h_T}{h_u} = \frac{\tan \beta_T}{\tan (\beta_T - \theta_{ZID})}. \quad (10)$$

Uvodeći zamenu za dubinu  $h_T = h_u + \Delta h$ , postavljajući  $\Delta \theta_{ZID} \rightarrow 0$ , a uz korišćenje jednačine (3) dobija se :

$$\frac{dh}{d\theta_{ZID}} = \frac{h}{\sin \beta_T \cos \beta_T} = \frac{V^2}{g} \tan \beta_T. \quad (11)$$

Izraz (11) opisuje promenu dubine  $h_{ZID}$  duž krivolinijskog zida kanala, zavisno od promene skretnog ugla  $\theta_{ZID}$  (Slika 4).



Slika 4. Šematski prikaz kontura poremećaja nastalih uz krivolinijski zid kanala

Integracijom jednačine (11), uz pretpostavku o konstantnoj specifičnoj energiji duž toka, dolazi se do izraza :

$$\theta_{ZID} = \sqrt{3} \tan^{-1} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{Fr_{ZID}^2 - 1}} - \tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{Fr_{ZID}^2 - 1}} - \theta_1. \quad (12)$$

Integraciona konstanta,  $\theta_1$ , se određuje iz uslova na početku krivine (prelaznice), gde je  $\theta_{ZID} = 0$ , i gde je poznata vrednost Frudovog broja  $Fr_{ZID} = Fr_u$ .

Duž konkavne deonice zida, AB, dubina  $h_{ZID}$  i ugao  $\beta_{ZID}$  raste, a  $Fr_{ZID}$  opada. Međutim,  $\beta_{ZID}$  ne raste istom brzinom kao i  $\theta_{ZID}$  (Slika 4), pa se linije poremećaja koje konvergiraju (ukoliko je kanal dovoljne širine), seku i prouzrokuju nagli skok dubine. Duž konvexne deonice zida, BC, dubina opada i linije poremećaja, koje sada divergiraju, mogu se posmatrati kao negativni talasi.

### 3. NUMERIČKI MODEL

Jednačine ravanskog toka (Reynolds-ove jednačine osrednjene po dubini, sa pretpostavkom o hidrostatičkom rasporedu pritisaka) napisace se u konzervativnom ("divergentnom") obliku, što omogućava modeliranje poremećaja sa strmim čelom (Jovanović, 1998) :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} + S = 0, \quad (13)$$

gde je :

$$U = \begin{Bmatrix} h \\ uh \\ vh \end{Bmatrix}, \quad E = \begin{Bmatrix} uh \\ u^2 h + \frac{1}{2} g h^2 \\ uvh \end{Bmatrix}, \quad (14)$$

$$F = \begin{Bmatrix} vh \\ uvh \\ v^2h + \frac{1}{2}gh^2 \end{Bmatrix}, \quad S = \begin{Bmatrix} 0 \\ -gh(I_{ox} - I_{tx}) \\ -gh(I_{oy} - I_{ty}) \end{Bmatrix}, \quad (15)$$

$$I_{ox} = \frac{\partial z_d}{\partial x}; \quad I_{oy} = \frac{\partial z_d}{\partial y}; \quad (16)$$

$$I_{ox} = \frac{n^2 u \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{4/3}}; \quad I_{oy} = \frac{n^2 v \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{4/3}}. \quad (17)$$

Za numeričko rešavanje prethodno napisanih jednačina ravanskog toka, u ovom radu su korišćene dve numeričke metode :

- *MacCormack – TVD* i
- *MUSCL – TVD*,

s obzirom na njihovu dobru reputaciju u modeliranju strujanja sa naglim promenama dubine i proticaja – talasa sa strmim čelom. Sledi kratak opis ovih metoda.

• **Metoda MacCormack – TVD**

*MacCormack* metoda konačnih razlika sadrži dva koraka (Vincent et al. 2001, Liu 2001, Jovanović 1998). U prvom, "prediktor", koraku predviđaju se vrednosti zavisno promenljivih, na osnovu poznatih vrednosti sa prethodnog vremenskog nivoa. U drugom, "korektor", koraku se koriguju vrednosti iz prediktor koraka, a krajnje rešenje se dobija osrednjavanjem, uz dodatak TVD člana, čija je uloga da smanji, ili potpuno otkloni numeričke oscilacije.

- Prediktor korak :

$$U_{i,j}^* = U_{i,j}^k - \frac{\Delta t}{\Delta x} \nabla_x E_{i,j}^k - \frac{\Delta t}{\Delta y} \nabla_y F_{i,j}^k - \Delta t S_{i,j}^k, \quad (18)$$

- Korektor korak :

$$U_{i,j}^{**} = U_{i,j}^k - \frac{\Delta t}{\Delta x} \Delta_x E_{i,j}^* - \frac{\Delta t}{\Delta y} \Delta_y F_{i,j}^* - \Delta t S_{i,j}^*, \quad (19)$$

- Nova vrednost :

$$U_{i,j}^{k+1} = \frac{1}{2} [U_{i,j}^k + U_{i,j}^{**}] + \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ R_{i+\frac{1}{2},j} \Phi_{i+\frac{1}{2},j} - R_{i-\frac{1}{2},j} \Phi_{i-\frac{1}{2},j} \right] + \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta t}{\Delta y} \left[ N_{i,j+\frac{1}{2}} \Theta_{i,j+\frac{1}{2}} - N_{i,j-\frac{1}{2}} \Theta_{i,j-\frac{1}{2}} \right], \quad (20)$$

gde je komponenta vektora  $\Phi_{i+\frac{1}{2},j}$  u x-pravcu :

$$\phi_{i+\frac{1}{2},j}^l = \left[ \Psi \left( a_{i+\frac{1}{2},j}^l \right) - \frac{\Delta t}{\Delta x} a_{i+\frac{1}{2},j}^2 \right] \cdot \left( \alpha_{i+\frac{1}{2},j}^l - \varphi \left( \alpha_{i+\frac{1}{2},j}^l \right) \right), \quad (21)$$

gde  $k$  označava vremenski nivo.

• **Shema MUSCL – TVD**

Druga metoda za numeričko modeliranje ravanskih tokova, korišćena u ovom radu, je *MUSCL–TVD* metoda (Monotone Upstream Scheme for Conservation Laws), iz grupe šema zasnovanih na razdvajanju razlike fluksa (Budinski 2004, Haim i Eitan 1990, Naoya i Tomoyuki 1989).

$$U_{i,j}^{k+1} = U_{i,j}^k - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ \tilde{E}_{i+\frac{1}{2},j}^k - \tilde{E}_{i-\frac{1}{2},j}^k \right] - \frac{\Delta t}{\Delta y} \left[ \tilde{F}_{i,j+\frac{1}{2}}^k - \tilde{F}_{i,j-\frac{1}{2}}^k \right] - \Delta t S_{i,j}^k. \quad (22)$$

Vrednosti fluksa u  $i$  pravcu  $\tilde{E}_{i+\frac{1}{2},j}^k, \tilde{E}_{i-\frac{1}{2},j}^k$  dobijaju se interpolacijom :

$$\tilde{E}_{i+\frac{1}{2},j}^k = \frac{1}{2} \left[ E_{(i+\frac{1}{2})R,j}^k + E_{(i+\frac{1}{2})L,j}^k \right] - \frac{1}{2} \left[ |A_{(i+\frac{1}{2},j)}^k \left( U_{(i+\frac{1}{2})R,j}^k - U_{(i+\frac{1}{2})L,j}^k \right) \right], \quad (23)$$

$$\tilde{E}_{i-\frac{1}{2},j}^k = \frac{1}{2} \left[ E_{(i-\frac{1}{2})R,j}^k + E_{(i-\frac{1}{2})L,j}^k \right] - \frac{1}{2} \left[ |A_{(i-\frac{1}{2},j)}^k \left( U_{(i-\frac{1}{2})R,j}^k - U_{(i-\frac{1}{2})L,j}^k \right) \right]. \quad (24)$$

Na sličan način izračunavaju se i  $\tilde{F}_{i,j+\frac{1}{2}}^k, \tilde{F}_{i,j-\frac{1}{2}}^k$  u  $j$  pravcu.

Vrednosti nepoznatih  $U^k_{(i+\frac{1}{2})R,j}$ ,  $U^k_{(i+\frac{1}{2})L,j}$  u x-pravcu dobijaju se prema izrazu :

$$\begin{aligned} U^k_{(i+\frac{1}{2})L,j} &= U^k_{i,j} + \frac{1}{4} \left[ (1-k) \bar{\nabla}_x U^k_{i,j} + (1+k) \bar{\Delta}_x U^k_{i,j} \right] \\ U^k_{(i+\frac{1}{2})R,j} &= U^k_{i,j} - \frac{1}{4} \left[ (1-k) \bar{\Delta}_x U^k_{i+1,j} + (1+k) \bar{\nabla}_x U^k_{i+1,j} \right] \end{aligned} \quad (25)$$

gde su :

$$\left. \begin{aligned} \bar{\nabla}_x &= \min \text{ mod}(\nabla_x, \Delta_x) \\ \bar{\Delta}_x &= \min \text{ mod}(\Delta_x, \nabla_x) \end{aligned} \right\} \text{ za x pravac .}$$

#### • Računska mreža

Da bi se računaska oblast složenog oblika lakše opisala, a granični uslovi tačnije definisali, korišćena je neortogonalna mreža krivolinijskih koordinata (Liu 2001, Jovanović 1998, Simonds 1982). Fizička oblast, prekrivena krivolinijskim koordinatama, transformiše se (rešavanjem sistema Laplasovih jednačina) u oblast jednostavne geometrije, u kojoj se obavlja proračun. Sistem Laplasovih jednačina rešava se iterativnom metodom sukcesivnih nadrelaksacija (SOR), naizmenično po pravcima  $x$  i  $y$ .

#### 4. PREGLED I ANALIZA REZULTATA

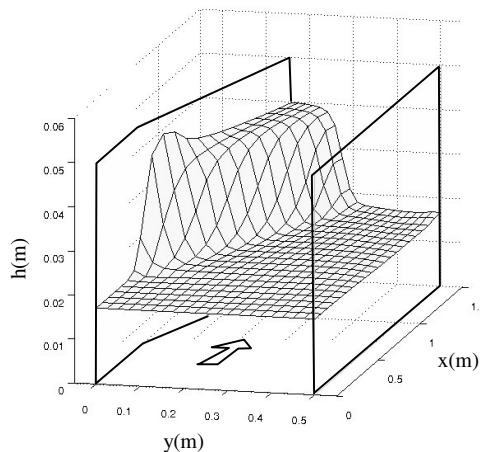
Mogućnosti opisanih numeričkih metoda za proračun tečenja u brzotoku, prikazane su kroz nekoliko jednostavnih slučajeva suženja i proširenja dna pravougaonog kanala na koje se mogu primeniti i prethodno prikazana „analitička“ rešenja. Samo ako se numerička rešenja pokažu uspešnim pri rešavanju jednostavnih primera, ima smisla primenjivati ih i na složenija strujanja, za koja ne postoje analitička rešenja. Rezultati ovih „numeričkih eksperimenata“ poređeni su između dve razmatrane numeričke metode, kao i sa odgovarajućim analitičkim rešenjima. (Od rezultata su prikazani raspored dubina i brzina u prostoru.)

Prva dva „eksperimenta“ obrađuju nesimetrično suženje (samo jedan zid kanala menja pravac u odnosu na neporemećeni deo korita), zatim sledi simetrično suženje i na kraju simetrično proširenje kanala.

#### • Pravolinijsko (linearno) skretanje jednog zida kanala – „oštro“ nesimetrično suženje

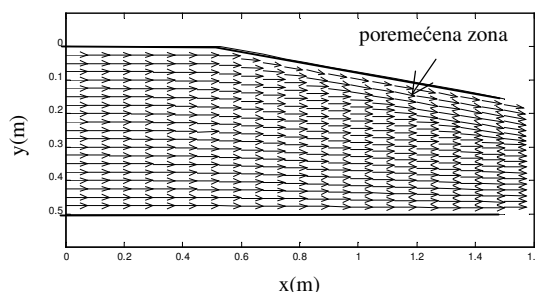
Kao „eksperimentalni“ numerički model izabran je horizontalni kanal pravougaonog poprečnog preseka, koji se linearno sužava sa početne širine od  $B=0,5m$ ,

pod uglom skretanja levog zida od  $\theta_{ZID}=3^{\circ}, 6^{\circ}$  i  $9^{\circ}$ , i sa dužinom skretanja od  $2B$ . Za svaki od skretnih uglova  $\theta_{ZID}$  tečenje je modelirano za vrednosti ulaznog Frudovog broja u rasponu od 10 do 100. Na slikama 5 i 6 prikazani su rezultati proračuna (raspored dubina i polje brzina) sa MUSCL-TVD metodom, pri skretnom uglu od  $\theta_{ZID}=9^{\circ}$  i za ulazni Frudov broj od  $Fr_u=50$ .



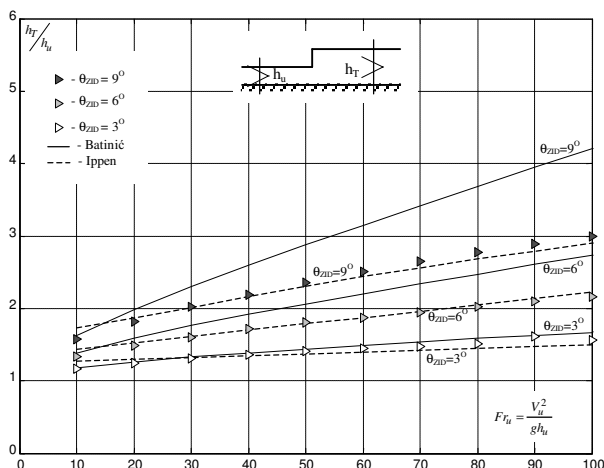
Slika 5. Raspored dubina pri skretanju zida kanala za  $\theta_{ZID}=9^{\circ}$  i  $Fr_u=50$  dobijeno MUSCL – TVD šemom; prostorni korak  $dx=0,075m$ ,  $dy=0,025m$

Usled promene pravca toka vode dolazi do naglog povišenja nivoa na mestu preloma zida kanala (na početku poremećaja), a zatim se nivo unutar zone poremećaja ujednačava, obrazujući kosi stojeći talas (Slika 5). Čelo talasa zahvata ugao  $\beta_T$  sa početnim pravcem zida kanala i deli tok na poremećenu i neporemećenu zonu (Slika 6). Vrednosti dobijene MacCormack metodom praktično se ne razlikuju od rezultata MUSCL metode za ovaj slučaj poremećaja, pa stoga nisu ni prikazane.

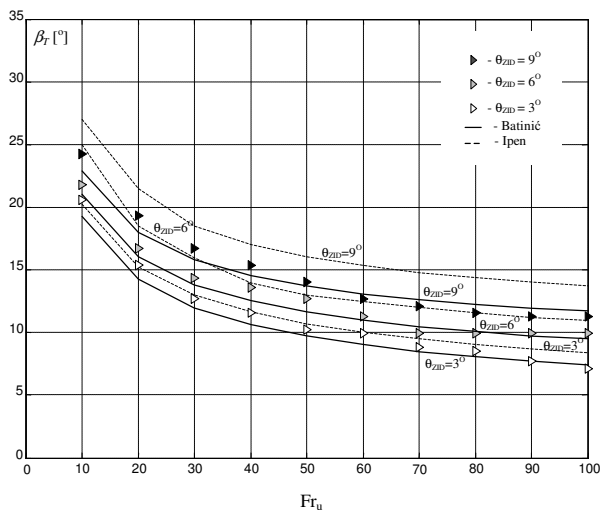


Slika 6. Vektorsko polje brzina pri skretanju zida kanala za  $\theta_{ZID}=9^{\circ}$  i  $Fr_u=50$  dobijeno MUSCL – TVD šemom

Na Slici 7 porede se rezultati proračuna relativne visine talasa  $h_T/h_u$ , dobijeni MUSCL–TVD metodom sa rešenjima analitičkih izraza Ippen-a (3) i Batinića (7), dok su na slici 8 upoređeni rezultati MUSCL–TVD metode za ugao čela talasa  $\beta_T$  sa analitičkim rešenjima Ippen-a (4) i Batinića-a (8).



Slika 7. Promena relativne visine talasa  $h_T/h_u$  u funkciji  $Fr_u$  dobijeno MUSCL-TVD metodom i analitičkim izrazom A.Ippen (3) i B.Batinića (7)



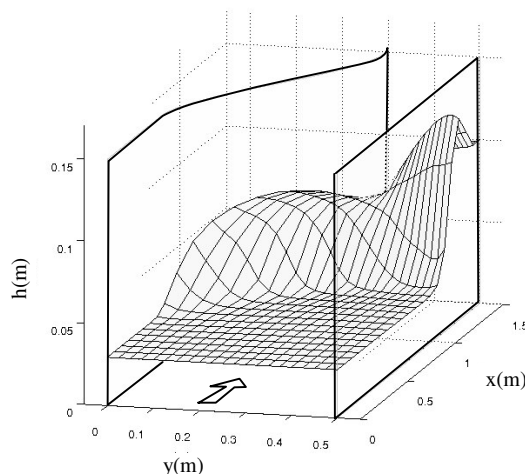
Slika 8. Promena ugla  $\beta_T$  u funkciji  $Fr_u$  dobijeno MUSCL - TVD metodom i analitičkim izrazom A.Ippen (4) i B.Batinića (8)

Uočava se dobro slaganje rezultata numeričkog i Ippen-ovog rešenja i znatno slabije slaganje sa Batinićevim rešenjem, naročito za veće vrednosti skretnog ugla. Uzrok treba tražiti u pretpostavkama koje su uvedene

prilikom izvođenja ovih izraza. Po Ippen-u, poremećeni sloj je jedinstven, sa hidrostatičkim rasporedom pritisaka po dubini, što predstavlja ujedno i osnovnu pretpostavku za izvođenje jednačina ravanskog toka, na osnovu kojih je dobijeno i numeričko rešenje. Po B.Batinić-u, sloj se deli na dva dela – sloja, u kojima su pritisci raspoređeni po hidrostatičkom zakonu, za svaki sloj zasebno.

• **Krivolinijsko (postepeno) skretanje jednog zida kanala – „glatko“ nesimetrično suženje**

Drugi razmatrani slučaj asimetričnog suženja korita, je krivolinijska –postepena promena pravca jednog od zidova pravougaonog kanala. Modelira se kanal širine  $B=0,5m$  sa prelaznim delom dužine  $2B$ . Rasporedi dubina i brzina ( $h=h(x,y)$ ,  $u=(x,y)$  i  $v=(x,y)$ ) pri  $Fr_u=10$ , sračunati MUSCL–TVD metodom prikazani su na Slikama 9 i 10. (Rezlutati proračuna MacCormack i MUSCL metode i u ovom slučaju pokazuju odlično međusobno slaganje.)

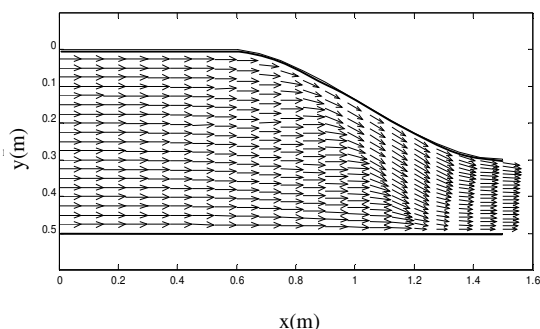


Slika 9. Raspored dubina pri krivolinijskom skretanju zida za  $Fr_u=10$ , dobijeno MUSCL-TVD metodom; prostorni korak  $dx=0,075m$ ,  $dy=0,025m$

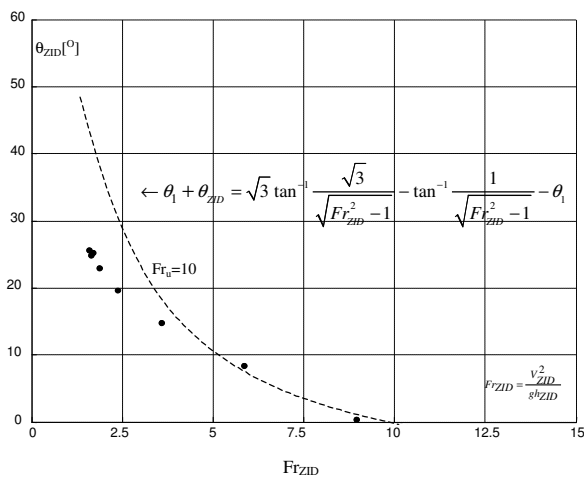
Duž *konkavnog* dela skretnog zida (Slika 9) dolazi do postepenog povišenja dubine  $h$  i povećanja ugla  $\beta_T$  između tangente krivolinijske konture zida i čela talasa (Slika 4), dok  $Fr_{ZID}$  (Frudov broj računat po konturi uz zid) opada. Za *konveksni* deo zida situacija je obrnuta – dubina  $h$  opada a  $Fr_{ZID}$  raste.

Na slici 11 prikazana je promena Frudovog broja duž konture zida,  $Fr_{ZID}$ , u funkciji promene ugla  $\theta_{ZID}$ . Isprekidana linija predstavlja rešenje implicitne

jednačine (12) za vrednost ulaznog Frudovog broja od  $Fr_u=10$ , dok su tačkama označeni rezultati proračuna metodom MUSCL–TVD (za  $Fr_u=10$ ). Primećuje se dobro slaganje numeričkog i analitičkog rešenja, izuzev za male vrednosti Frudovog broja, što može biti posledica pretpostavki na osnovu kojih je izvedeno „analitičko“ rešenje (12), pre svega pretpostavke o konstantnoj specifičnoj energiji (zanemarljivim gubicima) pri integrisanju jednačine 11.



Slika 10. Vektorsko polje brzina pri krivolinijskom skretanju zida za  $Fr_u=10$ , dobijeno MUSCL–TVD metodom; prostorni korak  $dx=0,075m$ ,  $dy=0,025m$



Slika 11. Promena  $Fr_{ZID}$  u funkciji ugla  $\theta_{ZID}$  pri krivolinijskom skretanju zida, dobijeno MUSCL–TVD metodom za  $Fr_u=10$  i analitičkim izrazom (12)

#### • Simetrično suženje

Simetrično suženje se često izvodi na uzvodnom delu brzotoka, kako bi se smanjio obim radova i dobila jeftinija konstrukcija. Poremećaji (talasi), koji ovde

nastaju na obe strane korita (s obzirom da oba zida promenom pravca remete pravolinijsko strujanje – slike 12a i 12b), međusobno se sudaraju i pri tom uvećavaju.

Za "eksperimentalni" računski model uzet je horizontalni kanal pravougaonog poprečnog preseka sa konstantnom širinom ispred suženja od  $B=0,5m$ , i sa stepenom suženja  $R_{SUŽ} = B_{SUŽ}/B$  od (Slika 12a):

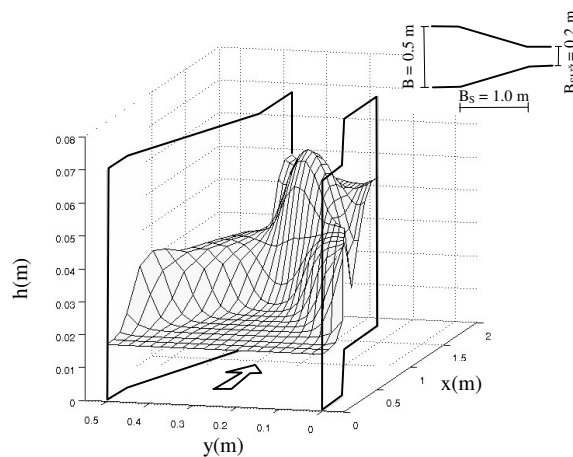
- $R_{SUŽ} = 0,4$ ,
- $R_{SUŽ} = 0,6$  i
- $R_{SUŽ} = 0,8$ ,

a za dve različite dužine prelaznog dela  $B_S$ :

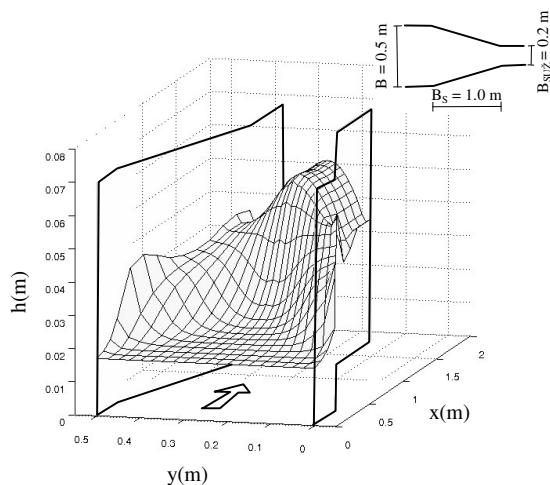
- $B_S = B$  i
- $B_S = 2B$ .

Koristeći numeričke šeme MUSCL–TVD i MacCormack–TVD, pri rasponu Frudovog broja na ulazu od  $Fr_u=10\div 100$ , sračunati su raspored dubina  $h(x,y)$  (Slike 12) i polje brzina  $u(x,y)$  i  $v(x,y)$  (Slike 13). Za prostorne korake uzeti su  $dx=0,075m$  i  $dy=0,025m$ , za slučaj prelazne dužine  $B_S=B$ , dok su u slučaju  $B_S=2B$  korišćene vrednosti koraka od  $dx=0,10m$  i  $dy=0,025m$ .

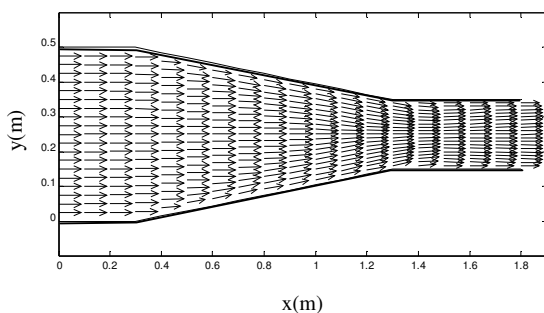
Na slikama 12a i 13a prikazane su vrednosti dobijene MUSCL–TVD metodom za  $R_{SUŽ} = 0,4$ ,  $B_S = 2B$  i  $Fr_u=50$ , a na slikama 12b i 13b rezultati dobijeni metodom MacCormack–TVD.



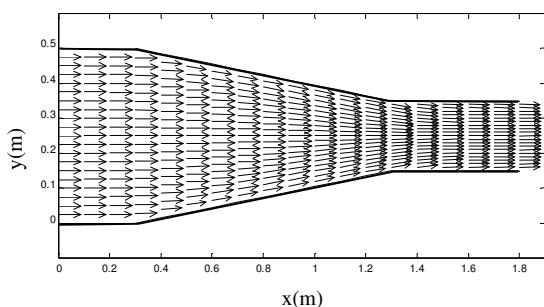
Slika 12a. Raspored dubina pri simetričnom suženju za  $R_{SUŽ}=0,4$ ,  $B_S=2B$  i  $Fr_u=50$  dobijeno metodom MUSCL–TVD; prostorni korak  $dx=0,1m$ ,  $dy=0,025m$



Slika 12b. Raspored dubina pri simetričnom suženju za  $R_{SUZ}=0,4$ ,  $B_S=2B$  i  $Fr_u=50$  dobijeno metodom MacCormack-TVD; prostorni korak  $dx=0,1m$ ,  $dy=0,025m$



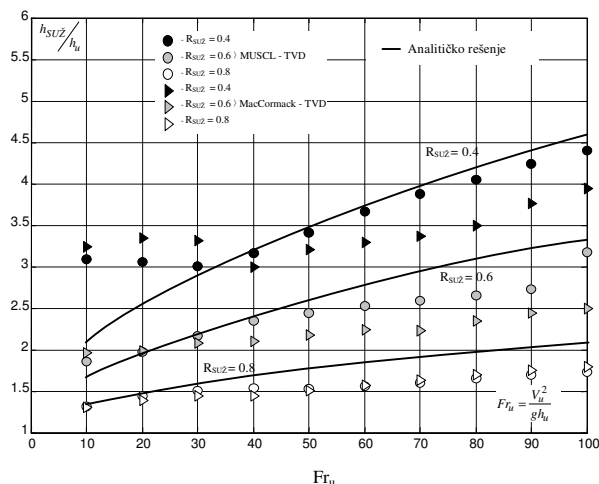
Slika 13a. Vektorsko polje brzina pri simetričnom suženju za  $R_{SUZ}=0,4$ ,  $B_S=2B$  i  $Fr_u=50$  dobijeno metodom MUSCL - TVD; prostorni korak  $dx=0,1m$ ,  $dy=0,025m$



Slika 13b. Vektorsko polje brzina pri simetričnom suženju za  $R_{SUZ}=0,4$ ,  $B_S=2B$  i  $Fr_u=50$  dobijeno metodom MacCormack-TVD; prostorni korak  $dx=0,1m$ ,  $dy=0,025m$

Primarni talasi, koje izaziva skretanje zida na obe strane suženja, sučeljavaju se i superponiraju na sredini kanala, stvarajući talas dvostruko veće visine, dok se talasi na samoj konturi (zidu) međusobno poništavaju (Henderson 1966). Na slikama 12a i 12b uočava se da MUSCL metoda bolje opisuje ovu pojavu od MacCormack metode – superponirani talas je odgovarajuće visine (dvostruko viši od primarnog), dok je poremećaj uz konturu „poništen“. Talasi su strmiji i oštrij, bez oscilacija i bez prigušenja. Razlog ovako dobrim rezultatima MUSCL metode treba tražiti u njenoj strukturi, koja preciznije sledi hiperboličku prirodu osnovnih jednačina.

Zavisnost odnosa maksimalne dubine u suženju,  $h_{SUZ}$ , i dubine na ulazu kanala,  $h_u$ , u funkciji ulaznog Frudovog broja,  $Fr_u$ , za  $B_S=2B$  i za tri različita stepena suženja,  $R_{SUZ}$ , prikazana je na Slici 14.



Slika 14. Promena relativne dubine  $h_{SUZ}/h_u$  u funkciji  $Fr_u$  za slučaj simetričnog suženja dobijeno metodama MUSCL - TVD i MacCormack - TVD;  $B_S=2B$

Porede se rezultati numeričkih metoda, MUSCL-TVD i MacCormack-TVD, sa analitičkim rešenjem, koje se dobija udvostručavanjem superponiranog „Ipen-ovog“ talasa (Rouse 1969) :

$$\frac{h_{SUZ}}{h_u} = \left( 2 \frac{h_{SUZ}}{h_u} - 1 \right) \tag{26}$$

I ovde se može zapaziti međusobno odstupanje rezultata numeričkih metoda, ali i slabije slaganje sa “analitičkim” rešenjem, posebno metode MacCormack. Povećanjem stepena suženja, neslaganje numeričkih



metoda postaje sve izraženije – metoda MUSCL daje sve veće dubine u odnosu na metodu MacCormack.

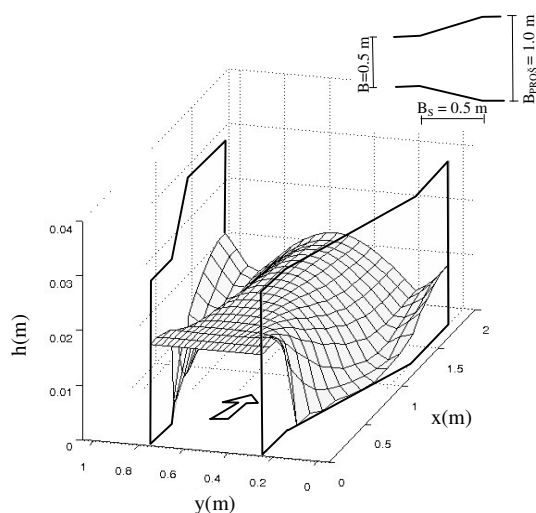
Razlike su još veće pri manjoj dužini prelaznice ( $B_S=B$ ), što je posledica strujanja u oštrijem suženju.

Stabilnost primenjenih numeričkih metoda, izražena preko kritičnog Courant-ovog broja,  $Cr_{kritično}$  (pri kome dolazi do uvećanja amplitude talasa kroz vreme), ispitana je za sve razmatrane slučajeve. Pokazalo se da metoda MUSCL–TVD ispunjava uslove stabilnosti za  $Cr \leq 1,0$ , dok metoda MacCormack–TVD postaje nestabilna i za vrednosti  $Cr$  koje su znatno manje od 1,0, (zavisno od ulaznog Frudovog broja i stepena suženja).

#### • Simetrično proširenje

Simetrično proširenje se često primenjuje na kraju brzotoka, pre upuštanja vode u umirujući bazen. Za razliku od tečenja u suženju, koje karakteriše nagli skok dubine u vidu kosih stojećih talasa, širenje korita prouzrokuje smanjenje dubine. Kada se iza proširenja ponovo uspostavi prizmatično korito, dolazi do sužavanja prethodno proširene struje – paralelni zidovi nizvodno od proširenja postaju prepreka i izazivaju strme kose talase.

Za "eksperimentalni" numerički model izabran je kanal pravougaonog poprečnog preseka, širine ispred proširenja od  $B=0,5\text{m}$ , sa stepenom proširenja  $R_{PROŠ} = B_{PROŠ} / B$  (slika 15a) od :

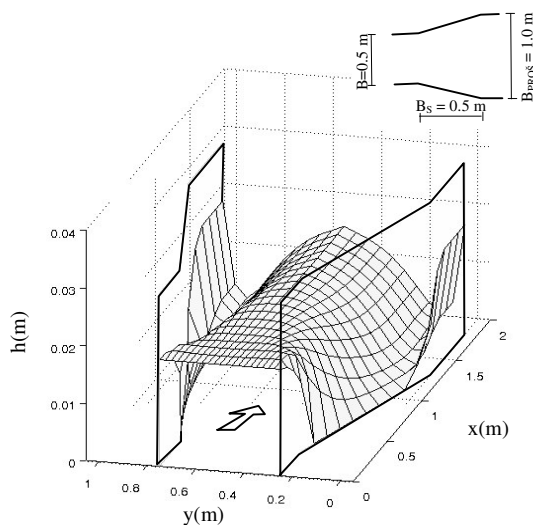


Slika 15a. Raspored dubina pri simetričnom proširenju za  $R_{PROŠ}=2,0$  i  $Fr_u=40$  dobijeno metodom MUSCL – TVD; prostorni korak  $dx=0,1\text{m}$ ,  $dy=0,025\text{m}$

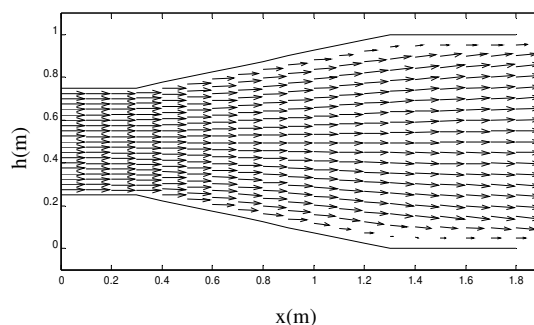
- $R_{PROŠ} = 1,5$ ,
- $R_{PROŠ} = 2,0$  i
- $R_{PROŠ} = 2,5$ ,

dok je dužina prelaznog dela jednaka ulaznoj širini,  $B_S = B$ .

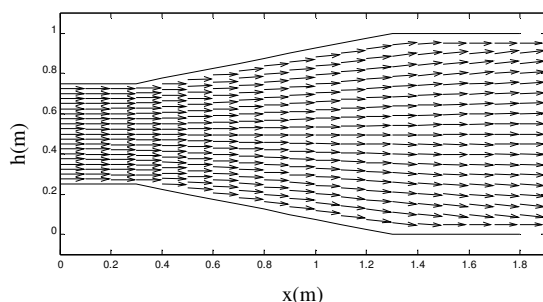
Rasporedi dubina,  $h=h(x,y)$ , dobijeni MUSCL–TVD, i MacCormack–TVD metodama, za slučaj  $R_{PROŠ} = 2,0$  i  $Fr_u = 40$ , prikazani su na Slikama 15a i 15b, a odgovarajući rasporedi brzina,  $u=u(x,y)$  i  $v=v(x,y)$ , na Slikama 16a i 16b.



Slika 15b. Raspored dubina pri simetričnom proširenju za  $R_{PROŠ}=2,0$  i  $Fr_u=40$  dobijeno metodom MacCormack – TVD; prostorni korak  $dx=0,1\text{m}$ ,  $dy=0,025\text{m}$



Slika 16a. Polje brzina pri simetričnom proširenju za  $R_{PROŠ}=2,0$  i  $Fr_u=40$  dobijeno metodom MUSCL – TVD; prostorni korak  $dx=0,1\text{m}$ ,  $dy=0,025\text{m}$



Slika 16b. Polje brzina pri simetričnom proširenju za  $R_{PROŠ}=2,0$  i  $Fr_u=40$  dobijeno metodom MacCormack – TVD; prostorni korak  $dx=0,1m$ ,  $dy=0,025m$

Neslaganje rezultata između primenjenih numeričkih metoda uočava se u zoni uspostavljanja pune širine proširenog preseka, gde metoda MacCormack–TVD daje nerealno velike vrednosti za dubine, znatno veće u odnosu na MUSCL–TVD metodu (slike 15a i 15b). Prema MUSCL metodi, brzine pri zidu su znatno manje od prosečne brzine u preseku (slika 16a), što ukazuje na nepotpuno širenje mlaza u odnosu na širenje konture brzotoka (što je česta pojava kod preoštrih proširenja). MacCormack metoda (slika 16b) ne „prepoznaje“ ovu pojavu – brzine pri zidu su istog reda veličine kao i prosečna brzina u preseku, što doprinosi (već opisanom) nastanku nerealno velikih talasa (dubina) u zoni uz zidove iza proširenja (slika 15b).

Ispitivanje numeričke stabilnosti primenjenih metoda za slučaj simetričnog proširenja, pokazalo je da se povećanjem stepena proširenja  $R_{PROŠ}$  i ulaznog Frudovog broja  $Fr_u$ , smanjuje vrednost kritičnog Courant-ovog broja  $Cr_{kritično}$ . I ovde se za MUSCL metodu dobijaju veće vrednosti  $Cr_{kritično}$  u odnosu na MacCormack metodu, koja postaje neupotrebljiva za vrednosti  $Fr_u > 40$ .

## 5. ZAKLJUČCI

Da bi se što tačnije opisalo strujanje u brzotoku za složenim geometrijskim karakteristikama korita, jednačine ravanskog toka modelirane su pomoću dve numeričke metode, MUSCL–TVD i MacCormack–TVD. U cilju vrednovanja primenjenih metoda, vršeni su „numerički eksperimenti“ za četiri različita slučaja promene geometrije korita, u širokom opsegu vrednosti graničnih uslova.

Na osnovu rezultata proračuna zaključeno je da metoda MUSCL–TVD bolje opisuje razmatrana strujanja, kao i da omogućava veću stabilnost i efikasnost (*robustnija* je) u odnosu na MacCormack–TVD metodu.

Rezultati pokazuju da bi se prikazani MUSCL model mogao koristiti u preliminarnim fazama projektovanja pri dimenzionisanju i oblikovanju brzotoka. Za konačno rešenje (u glavnom projektu), preporučuje se primena fizičkog modela, radi provere rešenja predloženog na osnovu numeričkog modela.

Treba naglasiti da jednačine ravanskog (2D) toka zanemaruju vertikalna ubrzanja (osim gravitacionog), što u slučaju prostornog (3D) strujanja, koje se ovde razmatra, nije u potpunosti opravdano. U narednim fazama istraživanja trebalo bi proveriti rad opisanih numeričkih metoda na složenijim slučajevima strujanja i uporediti rezultate proračuna sa laboratorijskim i/ili terenskim merenjima. Kasnije bi trebalo razviti prostorni (3D) numerički model i proceniti doprinos vertikalnih ubrzanja na kvalitet rezultata proračuna, a time ujedno i bolje oceniti opravdanost korišćenja 2D modela.

## LITERATURA

- [1] Jovanović, M., *Osnove numeričkog modeliranja ravanskih tokova*, Građevinski fakultet, Beograd, 1998.
- [2] Batinić, B., Milanović, T., *Problemi pri skretanju burnog toka - kosi stojeći talas*, Vodoprivreda, Beograd, 1997, p. 307- 314.
- [3] Henderson, F. M., *Open Channel Flow*, MacMillan Publishers, London, 1966.
- [4] Vincent, S., Caltagirone, J-P., Bonneton, P., *Numerical modelling of bore propagation and run-up on sloping beaches using a MacCormack TVD scheme*, Journal of hydraulic research, Vol. 39, No. 1, 2001.
- [5] Liu Yu-Ling., *Study of the mathematical model for numerical solution of supercritical surface flows*, XXIX IAHR CONGRESS, Beijing, 2001.
- [6] Budinski, Lj., *Numeričko modeliranje toka u burnom režimu*, Magistarska teza, Građevinski fakultet, Subotica, 2004.

- [7] Simmonds, J.G., *A Brief on Tensor Analysis*, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1982.
- [8] Rouse, H., *Tehnička hidraulika*, Građevinska knjiga, Beograd, 1969.
- [9] Naoya F., Tomoyuki H., EFFECTS OF THE ALFVÉN WAVE ON THE GRAVITATIONAL
- INSTABILITY IN THE INTERSTELLAR MEDIUM, University of Astrophysics, Nagoya, 1989.
- [10] Haim N., Eitan T., Non-oscillatory Central Differencing for Hyperbolic Conservation Laws, Journal of Computational Physics, New York, London, 1990.

## CONTRACTING-EXPANDING CHUTE NUMERICAL MODELLING

by

Ljubomir BUDINSKI  
Faculty of Civil Engineering, Subotica, E-mail: ljubab@eunet.yu  
Ljubodrag SAVIĆ  
Faculty of Civil Engineering, Belgrade

### Summary

Two-dimensional (2D) open-channel flow models for contracting and expanding chutes are developed. TVD McCormack and TVD MUSCL method have been used to facilitate an easy-to-use code. The performances of the numerical models have been

assessed, and the results compared with the analytical solutions.

Keywords: super-critical flow, disturbed flow, oblique standing wave, 2D models, numerical methods

Redigovano 13.04.2005.