

## PRIMENA LAMBERT-W FUNKCIJE ZA PRORAČUN OTPORA TRENJA U CEVIMA

Dejan BRKIĆ  
Ministarstvo za nauku i tehnološki razvoj, Beograd

### REZIME

Kolbrukova jednačina za proračun Darsijevo koeficijenta hidrauličkog otpora je data u implicitnom obliku, tako da se mora koristiti metoda 'pokušaja i probe' ili neka od iterativnih numeričkih kako bi ona bila rešena. Lambert W funkcija je transcendentna funkcija koja je takođe data u implicitnom obliku i definisana je samo preko elementarnih funkcija. Ona se može iskoristiti za egzaktnu matematičku transformaciju Kolbrukove jednačine u eksplicitan oblik koja nije aproksimacija implicitne Kolbrukove jednačine, sa time da pošto sadrži Lambert W funkciju ne može biti rešena bez aproksimacija. Prednost je što približna vrednost Lambert W funkcije može biti određena sa vrlo velikom tačnošću i to često u samo jednom koraku. Pored dva originalna oblika transformisane Kolbrukove funkcije, daće se i postupak njihovog rešavanja.

**Ključne reči:** Hidraulički otpor, Kolbrukova relacija

### 1. O KOLBRUKOVOJ JEDNAČINI

Poseban slučaj turbulentnog režima se javlja u hidraulički glatkim cevima, gde je u odsustvu hrapavosti koeficijent hidrauličkog otpora samo u funkciji Rejnoldsovog broja;  $\lambda_g = f(\text{Re})$ . Ovaj režim u današnje vreme dobija sve više na značaju pošto su polietilenske cevi (PVC) koje se sve više koriste praktično glatke [1]. U ovoj oblasti tzv. parcijalnog ili delimično turbulentnog režima za glatke cevi faktori otpora su dati u tzv. Blazijusovom obliku (1) pri čemu su to prave linije u prilagođenom koordinatnom sistemu  $\log(1000 \cdot \lambda) = f(\log \text{Re})$ .

$$\lambda_g = A \cdot \text{Re}^{-B} \quad (1)$$

Npr. poznata Renoarova jednačina [2,3] je Blazijusovog tipa gde je koeficijent  $A=0,172$  a eksponent  $B=0,18$ , Blazijusova  $A=0,3164$ ;  $B=0,25$ , itd. Blazijusova jednačina je empirijska, kao uostalom

praktično sve relacije koje se koriste za izračunavanje koeficijenta hidrauličkog otpora. Međutim, za razliku od Kolbrukove jednačine ona je data u eksplicitnom obliku u odnosu na koeficijent hidrauličkog otpora samim tim što se isti, tj.  $\lambda$  pojavljuje samo sa jedne strane znaka jednakosti. Prandtlova jednačina (2) je isto jedna od značajnih formula koje važe za hidraulički glatke cevi [4].

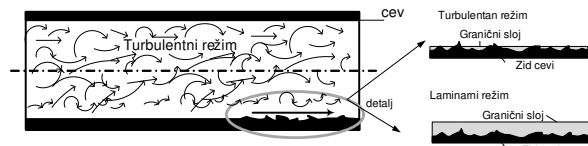
$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_g}} = 2 \cdot \log(\text{Re} \cdot \sqrt{\lambda_g}) - 0,8 \quad (2)$$

Na osnovu Prandtlve jednačine su razvijene brojne druge jednačine i ona uz jednačine Blazijusovog tipa spada u grupu jednačina koje se vrlo često koriste u hidraulici. Poznata je i kao NPK jednačina (Nikuradse-Prandtl-Karmanova) za hidraulički glatke cevi. Prandtlovu jednačinu (2) je u svojoj notaciji dao Kolbruk (3), tako da je ovaj oblik poznat i kao Kolbrukov izraz Prandtlve jednačine [5,6]:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_g}} = -2 \cdot \log\left(\frac{2,51}{\text{Re}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\lambda_g}}\right) \quad (3)$$

Oba oblika Prandtlve jednačine su data u implicitnom obliku u odnosu na Darsijev koeficijent hidrauličkog otpora [7,8]. Povećanjem vrednosti Rejnoldsovog broja pri protoku fluida kroz cevi uticaj hrapavosti počinje sve više da se ispoljava. Pri turbulentnom režimu u izrazito hrapavim cevima i pri nižim vrednostima Rejnoldsovog broja hidraulički gubici zavise kako od Rejnoldsovog broja  $\text{Re}$  tako i od uticaja relativne hrapavosti  $\varepsilon/D_u$ ; tj.  $\lambda_{gr} = f(\text{Re}, \varepsilon/D_u)$ . Fizičko postojanje ovoga efekta se može objasniti postojanjem tankog sloja fluida uz sam zid cevi koji se kreće laminarno dok se glavni front tečnosti u sredini cevi kreće turbulentno (Slika 1). Otuda i naziv za ovaj režim delimično ili parcijalno turbulentan režim strujanja u hrapavim cevima. Povećanjem vrednosti Rejnoldsovog broja, ovaj tanak sloj laminarnog strujanja postepeno nestaje,

tako da se razvija potpuno turbulentan režim za ceo profil fluida koji teče.



Slika 1. Različiti hidraulički režimi

Obrazac Altšulja (4) iz ruske [9], i Kolbruka (odnosno Kolbruka i Vajta) iz zapadne literature (5) opisuju tok u ovoj oblasti tzv. delimično ili parcijalno turbulentnog režima [5,6]. Korišćenje Altšuljove jednačine (4) ne samo da je bila ustaljena praksa u Rusiji za vreme SSSR-a, nego je to bila i zakonska obaveza. Sukharev sa saradnicima izveštava da upotreba Altšuljove jednačine više nije obavezujuća po najnovijim ruskim normama, ali da se isto tako ne uvodi obavezna upotreba bilo koje druge jednačine, te se samim tim i dalje najčešće po ustaljenoj praksi koristi Altšuljova jednačina [1]. Obrazac Altšulja (4) pokazuje dobru korelaciju sa Kolbrukovom (5) samo pri manjim vrednostima relativnih hrapavosti u cevima.

$$\lambda_{dt} = 0,1 \cdot \left( \frac{1,46 \cdot \varepsilon}{D_u} + \frac{100}{Re} \right)^{0,25} = 0,11 \cdot \left( \frac{\varepsilon}{D_u} + \frac{68}{Re} \right)^{0,25} \quad (4)$$

U praksi zapadnih zemalja za oblast delimično turbulentnog režima se najviše koristi obrazac Kolbruka (5). U literaturi se kao sinonim često upotrebljava i pojam obrazac Kolbruka i Vajta. Naime Kolbruk i Vajt su 1937. godine objavili pionirski rad [5] na osnovu koga je konstituisana pomenuta jednačina, dok je sam Kolbruk 1939. dalje razradio istu materiju u svom samostalnom radu [6].

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_{dt}}} = -2 \cdot \log \left( \frac{2,51}{Re \cdot \sqrt{\lambda_{dt}}} + \frac{\varepsilon}{3,71 \cdot D_u} \right) \quad (5)$$

Može se primetiti da je obrazac Altšulja (4) dat u eksplicitnom obliku, dok je Kolbrukov obrazac (5) dat u implicitnom obliku jer se član  $\lambda_{dt}$  pojavljuje i sa leve i sa desne strane znaka jednakosti. Isti je slučaj i kod Prandtllove relacije (2) kao i kod Kolbrukove interpretacije Prandtllove relacije (3) koje se koristi za proračun Darsijevog faktora hidrauličkog otpora u hidraulički 'glatkom' režimu, o čemu je već bilo reči. Ova implicitnost Kolbrukove jednačine sa gledišta traženog Darsijevog faktora hidrauličkog otpora je i dovela do toga da se u literaturi pojave brojne aproksimacije Kolbrukove jednačine koje su naravno

sve u eksplicitnom obliku. Prikazaće se samo tri primera, Čerčilova (Churchil [10]) (6), koja važi za sve režime uključujući i laminaran:

$$\lambda_{dt} = 8 \cdot \left[ \left( \frac{8}{Re} \right)^{12} + \frac{1}{(\Theta_1 + \Theta_2)^{1,5}} \right]^{\frac{1}{12}} \quad (6)$$

Gde je:

$$\Theta_1 = \left( \frac{37530}{Re} \right)^{16}$$

$$\Theta_2 = \left[ 2,457 \cdot \ln \frac{1}{\left( \frac{7}{Re} \right)^{0,9} + 0,27 \cdot \frac{\varepsilon}{D_u}} \right]^{16}$$

Čenova (Chen [11-13]) (7):

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_{dt}}} = -2 \cdot \log \left[ \frac{\varepsilon}{3,7 \cdot D_u} - \frac{5,04}{Re} \cdot \log \left( \frac{1}{2,82} \left( \frac{\varepsilon}{D_u} \right)^{1,109} + \frac{5,85}{Re^{0,89}} \right) \right] \quad (7)$$

i Vudova (Wood [14]) (8):

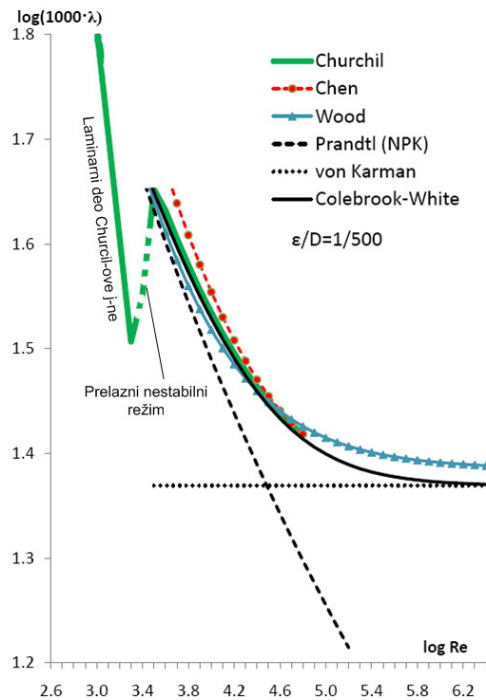
$$\lambda_{dt} = 0,094 \cdot \left( \frac{\varepsilon}{D_u} \right)^{0,225} + 0,532 \cdot \left( \frac{\varepsilon}{D_u} \right) + 88 \cdot \left( \frac{\varepsilon}{D_u} \right)^{0,44} \cdot Re^{-\Psi} \quad (8)$$

Gde je:

$$\Psi = 1,62 \cdot \left( \frac{\varepsilon}{D_u} \right)^{0,134}$$

Sve aproksimacije su dosta složene i u današnje vreme nepotrebne jer se i implicitna Kolbrukova relacija može rešiti vrlo lako uz pomoć npr. MS Excel-a [15]. Čerčilova eksplicitna jednačina (6) npr. aproksimira Kolbrukovu jednačinu u području svih režima koje ova pokriva ali važi i za laminarni režim (Slika 2) [10].

U Kolbrukovoj interpretaciji Prandtllove jednačine (3), koeficijent 2,51 se u pojedinim slučajevima zamenjuje sa 2,825 na osnovu istraživanja sprovedenim u AGA (American Gas Institute). Isto se može primeniti i za Kolbrukovu jednačinu (5). Zamenom koeficijenta 2,51 koeficijentom 2,825 postiže se bolja korelacija eksperimentalnih podataka sa računskim podacima pri većim vrednostima Rejnoldsovog broja što naročito dolazi do izražaja u slučajevima proticanja gasa (modifikovana Kolbrukova jednačina) [2].



Slika 2. Različite aproksimacije Kolbrukove jednačine

Za slučaj delimično turbulentnog režima, u delu dijagrama gde se grana linija koja predstavlja koeficijent hidrauličkog otpora za glatke cevi i zatim deli na više linija koje odgovaraju različitim relativnim hrapavostima, Kolbruk je predložio sažimanje Prandtlove jednačine (3) za hidraulički 'gladak' režim i fon Karmanove jednačine (9) za potpuno turbulentan režim u hrapavim cevima. Treba pometiti da je i Altšuljova jednačina (4) istog oblika i da je i ona sastavljena iz dva dela na osnovu slične ideje.

Za oblast potpune turbulencije važi fon Karmanov obrazac (9):

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_t}} = 1,74 - 2 \cdot \log\left(\frac{2 \cdot \varepsilon}{D_u}\right) = 1,14 - 2 \cdot \log\left(\frac{\varepsilon}{R}\right) \quad (9)$$

On se daje i u tzv. Kolbrukovom obliku (10):

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_t}} = 2 \cdot \log\left(\frac{3,7 \cdot D_u}{\varepsilon}\right) \quad (10)$$

U ruskoj literaturi se za ovu oblast daje Šifrinsonov obrazac (11):

$$\lambda_t = 0,111 \left(\frac{\varepsilon}{D_u}\right)^{\frac{1}{4}} \quad (11)$$

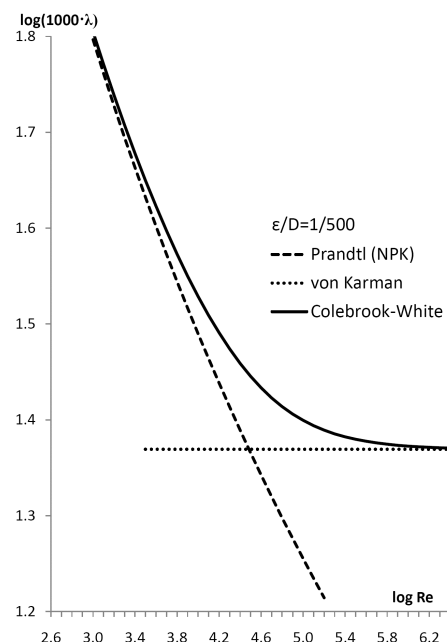
Kolebrukovom jednačinom (5) se omogućava uspostavljanje glatkog prelaza između hidraulički 'glatkog' režima i potpunog turbulentnog režima (Slika 3).

Kolbrukova jednačina se sastoji iz dva dela, i to deo A koji je sličan Prandtlovoj jednačini za hidraulički 'gladak' režim i deo B koji je sličan fon Karmanovoj relaciji za potpuno turbulentan režim (12).

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\lambda_{dt}}} &= -2 \cdot \log\left(\frac{2,51}{Re \cdot \sqrt{\lambda_{dt}}} + \frac{\varepsilon}{3,71 \cdot D_u}\right) = \\ &= -2 \cdot \log\left(\alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{\lambda_{dt}}} + B\right) = -2 \cdot \log(A + B) \end{aligned} \quad (12)$$

Treba napomenuti da po pravilima logaritmovanja zbir logaritama nije jednak logaritmu zbira, tj.  $\log(A+B) \neq \log(A) + \log(B)$ . Iz ovoga ne treba izvući zaključak da su Kolbruk i Vajt napravili matematičku grešku (13).

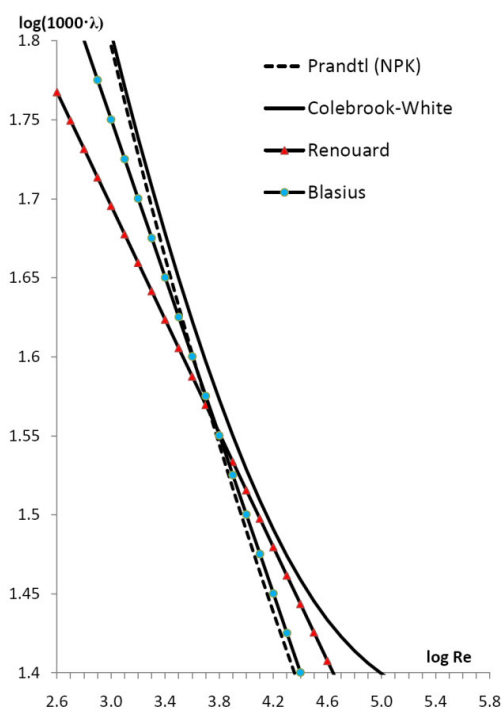
$$\begin{aligned} -2 \cdot \log\left(\frac{2,51}{Re \cdot \sqrt{\lambda_{dt}}}\right) - 2 \cdot \log\left(\frac{\varepsilon}{3,71 \cdot D_u}\right) &\neq \\ \neq -2 \cdot \log_{10}\left(\frac{2,51}{Re \cdot \sqrt{\lambda_{dt}}} + \frac{\varepsilon}{3,71 \cdot D_u}\right) &\quad (13) \end{aligned}$$



Slika 3. Kolbrukova jednačina omogućava glatki prelaz između hidraulički glatkog režima i potpuno turbulentnog režima

Uostalom, kao što se vidi sa slike 3, cilj nije ni bio da se objedine Prandtlova i fon Karmanova jednačina u jednu, već da se napravi glatki prelaz koji i odgovara stvarnoj promeni Darsijeovog koeficijenta hidrauličkog otpora kakva se i javlja u realnim hidrauličkim sistemima kada je u pitanju delimični turbulentan režim. Naime, problem može da se postavi kao inverzan, tako da je podjednako matematički netačno rastaviti Kolbrukovu jednačinu na Prandtlovu i fon Karmanovu. Treba uzeti u obzir da Kolbruk i Vajt došli do svoje jednačine posle niza eksperimenata, tj. oni nisu sprovodili egzaktno matematičke proračune. Prethodno je već rečeno da su do svojih rezultata Prandtl i fon Karman došli na osnovu eksperimenata koje je sproveo Nikuradse, tako da se može zaključiti da su sve tri relacije empirijske prirode.

U današnje vreme se jednačine Prandtla i fon Karmana smatraju graničnim slučajem Kolbrukove jednačine, tako da se Kolbrukova jednačina može koristiti za sve režime osim laminarnog (Slika 4).



Slika 4. Kolbrukova jednačina u oblasti hidraulički 'glatkog' režima

## 2. LAMBERT W FUNKCIJA

Johan Hajnrih Lambert (Johann Heinrich Lambert; 1728-1777) je pokazivao širok istraživački interes. Iako je bio samouki sin krojača, u zrelom dobu je dao

fundamentalne doprinose u teoriji brojeva, geometriji, statistici, astronomiji, meteorologiji, higrometriji, pirometriji, optici, kosmologiji i filosofiji. Lambert je prvi dokazao iracionalnost Ludolfovog broja  $\pi$ . Uveo je obeležavanja hiperboličkih funkcija kakva se i danas koriste.

Lambert W funkciju je prvi formulisao Lambert 1758, dok je Ojler naredne dve decenije detaljno ispitivao njene osobine. Lambert W funkcija se definiše kao (14) [16-20]:

$$W(x) \cdot e^{W(x)} = x \quad (14)$$

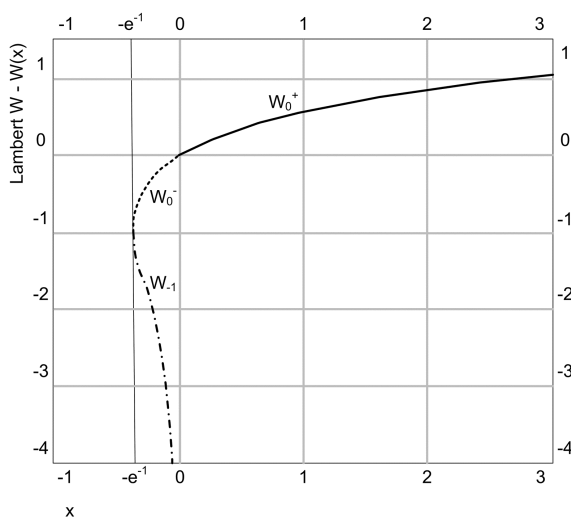
Sama Lambert W funkcija nije algebarska. Lambert W funkcija je implicitna transcendentna funkcija koja je definisana samo preko elementarnih funkcija (14). Transcendentna znači da ona ne može da se izrazi preko drugih algebarskih funkcija u konačnom obliku.

Implicitan oblik Kolbrukove jednačine može da se transformiše u eksplicitan oblik bez bilo kakvih uprošćenja ili aproksimacija pomoću Lambert W funkcije. Dakle ova transformacija je izvedena egzaktnim matematičkim postupkom. Nažalost, danas još uvek ne postoji egzaktna način da se izračuna numerička vrednost Lambert W funkcije za dati numerički argument bez nekih aproksimacija. Ako u budućnosti matematičari pronadu ovaj način to će biti i tačno rešenje ovde prikazane egzaktno transformisane Kolbrukove jednačine u eksplicitan oblik uz pomoć Lambert W funkcije (27, 28, 31). Za pretpostaviti je da ovo rešenje neće biti ni prosto ni kratko i da će stoga imati samo teorijski značaj ili što je verovatnije biće iskorišćeno kao procedura za računarske programe [21] ili će biti ugrađeno kao funkcija u naprednije ručne kalkulatore.

Lambert W funkcija se danas koristi u različitim poljima nauke i tehnike kao što su kretanje podzemnih voda, problem padobranskog skoka, demografske studije, kolaps zvezda, itd [17,19,22]. Lambert W funkcija je skorije vreme počela da se koristi i u hidraulici [23-26]. U radovima Sonada i Godara [23-26] se koristi Lambert W funkcija za transformaciju implicitnih jednačina u hidraulici, ali sam postupak za približno rešavanje Lambert W funkcije nije pokazan do detalja. Mor [27] daje detaljniju proceduru po kojoj može da se nađe ovo rešenje. Nandakumar [28] daje programski kod za približno rešavanje Lambert W funkcije kao dodatak uz razmatrani hidraulički problem. Treba napomenuti da su moduli za približno rešavanje Lambert W funkcije dostupni u okviru specijalizovanih matematičkih paketa kao što su Maple

ili Mathematica. Način za iznalaženje približnog rešenja koje se odnosi na realnu granu Lambert W funkcije je do detalja prikazano u radovima Bojda [18] i Barija sa saradnicima [19,20]. Da ne bi došlo do zabune treba napomenuti da Bojd u svome radu prirodni Neperov logaritam označava sa  $\log$  (trebalo bi da stoji  $\ln$  ili  $\log_e$ ) što je inače uobičajena oznaka za dekadni Briggsov logaritam [18]. Detaljnije o Lambert W funkciji se može saznati iz radova Korlesa sa saradnicima [17] i Rajta [16].

Za realne vrednosti argumenta  $x$ , funkcija ima dve grane, i to:  $W_0$ -glavnu granu i  $W_{-1}$ -negativnu granu (Slika 5).



Slika 5. Realne grane Lambert W funkcije

Negativna grana je u opsegu  $W_{-1} \geq -1$ , dok se glavna grana obično deli na dva opsega, tj. na donji deo glavne grane  $-1 \leq W_0^- \leq 0$  i na gornji deo glavne grane  $W_0^+ \geq 0$ . Ovde prikazan problem će se koristiti samo gornji deo glavne grane Lambert W funkcije. Domen glavne grane je  $W_0 \in [-1, +\infty)$  za  $x \in [-1/e, +\infty)$ . Deo koji će biti obrađen u ovde ima domen  $W_0^+ \in [0, +\infty)$  za  $x \in [0, +\infty)$ .

Analitičko rešenje Lambert W funkcije se definiše kao (15):

$$W = \ln \left( \frac{x}{\ln \left( \frac{x}{\ln(\cdot)} \right)} \right) \quad (15)$$

### 3. Približno rešavanje Lambert W funkcije

Po Bojdu [18] je najbolje definisati pomoćnu funkciju u cilju dobijanja približnog rešenja Lambert W funkcije (16):

$$\omega = W + 1 \Leftrightarrow W = \omega - 1 \quad (16)$$

Za ovako 'pomerenu' funkciju treba transformisati i njen argument (17):

$$y = 1 + x \cdot e^1 \approx 1 + 2,71 \cdot x \Leftrightarrow x = \frac{y-1}{e^1} \approx \frac{y-1}{2,71} = 0,367 \cdot (y-1) \quad (17)$$

Zatim se Lambert W funkcija može izraziti u transformisanom obliku (18):

$$(\omega-1) \cdot e^\omega = y-1 \quad (18)$$

Približno rešenje ovako transformisane funkcije po Bojdu je (19) [18]:

$$\omega_0 = \left\{ \ln(y+10) - \ln(\ln(y+10)) \right\} \cdot \tanh \left( \frac{(2 \cdot y)^{0,5}}{\ln(10) - \ln(\ln(10))} \right) \quad (19)$$

U prethodnoj jednačini (19) tangens hiperbolicus se definiše kao  $\tanh(\xi) = (e^\xi - e^{-\xi}) / (e^\xi + e^{-\xi})$ . Ovo rešenje po Bojdu za  $\omega_0$  ima na domenu  $y \in [0, +\infty)$  maksimalnu grešku od 15,4% u poređenju sa formalnim rešenjem (15). Poboljšano rešenje je takođe dostupno (20) [18].

$$\omega_0 = \omega_0 \{1 + \Omega\} \quad (20)$$

Gde je:

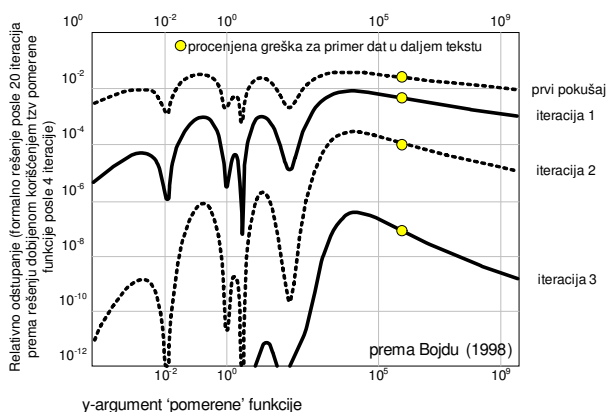
$$\Omega = \frac{\left( \ln(y) - \frac{7}{5} \right) \cdot e^{-\frac{3}{40} \left( \ln(y) - \frac{7}{5} \right)^2}}{10}$$

Poboljšano rešenje po Bojdu (20) ima maksimalnu grešku od 4,7%. Kada se ovo poboljšano rešenje (20) uzme kao ulazni parametar za Njutn-Rapsonov iterativni postupak (21), relativna greška se već posle četvrtice iteracije smanjuje ispod  $10^{-12}$  na celom domenu [5].

$$\omega_{i+1} = \omega_i - \frac{(\omega_i - 1) - e^{-(\omega_i)(y-1)}}{\omega_i} \quad (21)$$

Ova greška nije ravnomerno raspoređena po celom domenu takozvane 'pomerene' funkcije  $\omega(y)$  (Slika 6).

Treba imati na umu da se procenjena vrednost greške prikazane na slici 6 ne odnosi na samu Lambert W funkciju, već samo na tzv. ‘pomerenu’ tj. pomoćnu Bojdovu funkciju  $\omega(y)$ , tako da procene date na slici 6 imaju ograničenu važnost imajući u vidu da se u stvari važna procena greške funkcije  $W(x)$ .



Slika 6. Procena vrednosti greške pri upotrebi pomoćne pomerene funkcije  $\omega$  koja se koristi za određivanje približne vrednosti Lambert W funkcije

Bari sa saradnicima [19,20] daje nešto drugačiji izraz za računanje približne vrednosti Lambert W funkcije (22):

$$W_0^+(x) = \ln \frac{6 \cdot x}{5 \cdot \ln \left[ \left( \frac{12}{5} \right) \cdot \left( \frac{x}{\ln \left( 1 + \frac{12 \cdot x}{5} \right)} \right) \right]} \quad (22)$$

Prethodno prikazano rešenje (22) po Bariju i saradnicima [19,20] pravi najveću moguću grešku od 23% za  $x > 1$ . Ovako procenjena greška se odnosi na samu Lambert W funkciju, tj.  $W(x)$ . Ovako relativna greška se javlja samo na uskim segmentima domena funkcije dok je realno u najvećem broju slučajeva znatno manja (uporediti ponašanje relativne greške na domenu ‘pomerene’ Bojdove funkcije na slici 6 [18]). Bari i saradnici [19,20] nude i tačnije ali znatno složenije rešenje o kome ovde neće biti reči. Prikazan metod za približno rešavanje Lambert W funkcije po Bariju i saradnicima (22) [19,20] je daleko prostiji u odnosu na Bojdovu metodu. Postupci koji važe nalaženje približnog numeričkog rešenja za ostale delove realne grane Lambert W funkcije koji nemaju primenu u našem slučaju neće se ni razmatrati.

#### 4. TRANSFORMACIJA IMPLICITNIH IZRAZA POMOĆU LAMBERT W FUNKCIJE

Kolbrukov oblik Prandtlove jednačine (3) o kome se takođe diskutovalo u prethodnom tekstu se takođe može transformisati koristeći Lambert W funkciju (23-25);  $a=2/\ln(10)$ :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_g}} + a \cdot \ln \left( \frac{1}{\sqrt{\lambda_g}} \right) = -a \cdot \ln \left( \frac{2,51}{Re} \right) \quad (23)$$

$$\Phi \cdot a + a \cdot \ln(\Phi \cdot a) = -a \cdot \ln \left( \frac{2,51}{Re} \right) \quad (24)$$

$$\Phi = W \left[ \frac{Re}{2,51 \cdot a} \right] \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{\lambda_g}} = a \cdot W \left[ \frac{Re}{2,51 \cdot a} \right] \quad (25)$$

Konačno Kolbrukov izraz Prandtlove jednačine transformisan u eksplicitan oblik bez bilo kakvih aproksimacija izražen preko Lambert W funkcije se daje kao (26):

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_g}} = 0,868589 \cdot W[0,458682 \cdot Re] \quad (26)$$

Mor [27] daje jedan od mogućih oblika Kobrukove jednačine transformisane u eksplicitan oblik na matematički egzaktan način pomoću Lambert W funkcije (27):

$$\lambda_{dt} = \frac{1}{\left[ O_3 \cdot W \left( \frac{O_1}{O_2 \cdot O_3} \right) - \frac{O_1}{O_2} \right]^2} \quad (27)$$

Gde je:

$$O_1 = \frac{\epsilon}{3,71 \cdot D_u}$$

$$O_2 = \frac{2,51}{Re}$$

$$O_3 = \frac{2}{\ln(10)} \approx 0,868589$$

Izvođenje prethodne jednačine (27) je dostupno u literaturi, te se u ovde neće posebno prikazivati [27]. U ovom radu se daje jedan drugačiji oblik transformisane

Kolbrukove jednačine pomoću Lambert W funkcije (28):

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_{dt}}} = -2 \cdot \log \left( 10^{\frac{1}{\ln(10)} W \left[ \frac{\text{Re} \cdot \ln(10)}{5,02} \right] + \frac{\varepsilon}{3,71 \cdot D_u}} \right) \quad (28)$$

Transformisani oblik Kolbrukove jednačine (28) je dobijen na osnovu transformacija Prandtllove jednačine koja važi za 'hidraulički' gladak režim (3 i 25), tj. (29):

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_g}} = \frac{2}{\ln(10)} W \left[ \frac{\text{Re} \cdot \ln(10)}{2 \cdot 2,51} \right] = -2 \cdot \log \left( \frac{2,51}{\text{Re}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\lambda_g}} \right) \quad (29)$$

Odnosno, posredno se može zaključiti da je (30):

$$\frac{\text{Re} \cdot \ln(10)}{2 \cdot 2,51} = 10^{-2 \cdot \log \left( \frac{2,51}{\text{Re}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\lambda_g}} \right)} \quad (30)$$

Iz prethodnog se direktno izvodi relacija (28). Relacija (31) je ekvivalentna jednačini (30):

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_{dt}}} = -2 \cdot \log \left( \frac{5,02 \cdot W \left[ \frac{\text{Re} \cdot \ln(10)}{5,02} \right] + \frac{\varepsilon}{3,71 \cdot D_u}}{\text{Re} \cdot \ln(10)} \right) \quad (31)$$

Prethodna jednačina se dobija zamenom člana  $\sqrt{\lambda_{dt}}$  u Kolbrukovoj jednačini ekvivalentom istoga člana uzetim iz jednačine (25) koji se može zapisati kao (32):

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_g}} = \frac{1}{\frac{2}{\ln(10)} \left[ \frac{\text{Re} \cdot \ln(10)}{5,02} \right]} \quad (32)$$

Originalne jednačine koje su u ovom radu prikazane (28) i (31) imaju prednost nad jednačinom (27) i u tome što se mogu koristiti za proračune u Excel-u bez bojazni da će se pojaviti preterano veliki brojevi koji ne mogu stati u memoriju računara [24,26] - zainteresovani čitaoci se pozivaju da ponove računicu koja je ovde prikazana za npr.  $\text{Re}=10^7$  i nešto veće vrednosti relativne hrapavosti koristeći kako jednačine (28) i (31) tako i jednačinu (27).

**Problem:** Za vrednost Rejnoldsovog broja  $\text{Re}=397000$  i relativnu hrapavost unutrašnjeg zida cevi  $\varepsilon/D_u=1,23 \cdot 10^{-3}$ , izračunati vrednost Darsijevog i Fanningovog koeficijenta hidrauličkog otpora  $\lambda_{dt}$  koristeći Kolbrukovu jednačinu (5) kao i njen reformulisan eksplicitan oblik izražen preko Lambert W funkcije (28). Dobljene rezultate uporediti sa raspoloživim eksplicitnim aproksimativnim formulama Kolbrukove jednačine [29,30].

Rešenje: Rezultati proračuna se daju u tabeli 1 i 2.

Tabela 1. Postupak pri rešavanju problema

za $\text{Re}=3,97 \cdot 10^5$ i $\varepsilon/D_u=1,23 \cdot 10^{-3}$		
po Bojdu [18]		
-	x	182096,8689
(17)	y	494991,6098
(19)	$\omega_0(y)$	10,5387643300
(20)	$\overline{\omega}_0(y)$	10,5391843423
(21)	$\omega_1(y)$	10,8776673213
(21)	$\omega_2(y)$	10,8285140077
(21)	$\omega_3(y)$	10,8271465820
(21)	$\omega_4(y)$	10,8271455597
(31)	$\omega_5(y)$	10,8271455597
(26)	W(x)	9,8271455597
(28), (31)	$\lambda$	0,021449641
-	$\log(1000 \cdot \lambda)$	1,3314200297
po Bariju i saradnicima [19,20]		
-	x	182096,8689
(22)	W(x)	9,950528288
(28), (31)	$\lambda$	0,021360515
-	$\log(1000 \cdot \lambda)$	1,3296117157
formalno rešenje Lambert W funkcije (15)		
-	x	182096,8689
(15)	W(x)	9,8271453253
(28), (31)	$\lambda$	0,021449641
-	$\log(1000 \cdot \lambda)$	1,3314200334
koristeći MS Excel [15]		
(5)	$1/\sqrt{\lambda}$	6,85021961
-	$\lambda$	0,021310371
-	$\log(1000 \cdot \lambda)$	1,3285910106

Tabela 2. Rešenje problema, tj. rezultati različitih načina proračuna Kolbrukove jednačine

Jednačina	<sup>a</sup> Darsijev koeficijent $\lambda$	<sup>b</sup> Faningov koeficijent $f$	<sup>c</sup> relativna greška %
Kolbrukova /Colebrook/ (5)	0,021310371	0,005327593	-
<sup>d</sup> modifikovana Kolbrukova	0,021386953	0,005346738	0,3594
Vud /Wood/ (8) [14]	0,022396374	0,005599094	5,0961
Čerčil /Churchil/ (6) [10]	0,021434927	0,005358732	0,5845
Čen /Chen/ (7) [11-13]	0,021351770	0,005337942	0,1943
<b>Lambert W</b>			
po Bojdu /Boyd/ (16-21) [18]	0,021449641	0,005362410	0,6535
Bari /Barry et al/ (22) [19,20]	0,021360515	0,005340129	0,2353
formalno rešenje (15)	0,021449641	0,005362410	0,6535

<sup>a</sup>za  $Re=397000$  i  $\varepsilon/D_u=1,23 \cdot 10^{-3}$ , <sup>b</sup> $f=\lambda/4$ , <sup>c</sup>poređeno sa Kolbrukovom j-nom (5), <sup>d</sup>konstanta 2,51 zamenjena sa 2,825

## 5. ZAKLJUČAK

Kolbrukova jednačina (5) iako uvedena u upotrebu pre sedamdeset godina, i u današnje vreme se može smatrati jednom od najčešće korišćenih jednačina u hidraulici, vodoprivredi, naftnoj industriji, itd., odnosno svugde gde treba odrediti hidraulički otpor u cevima, ali često i u otvorenim tokovima [31,32]. Najveća mana ove jednačine je njen implicitan oblik. Mnoge aproksimacije ove jednačine su poznate. Sve one uključujući i polaznu Kolbrukovu jednačinu (5) su empirijske, odnosno sa približnom tačnošću daju vrednosti hidrauličkih otpora u cevima. U ovom radu je prikazan nešto drugačiji pristup u njenom rešavanju, ali podjednako tačan. Lambert W funkcija se može koristiti za rešavanje i ostalih problema u vodoprivredi i eksploataciji vode i nafte [33]. Poznata je njena primena u rešavanju Ričardsove jednačine (uporediti pristup u [22,34,35]).

### Oznake:

$\lambda_g$  - Darsijev koeficijent hidrauličkog otpora za 'gladak' režim

$\lambda_{dt}$  - Darsijev koeficijent hidrauličkog otpora za delimično turbulentan režim

$\lambda_t$  - Darsijev koeficijent hidrauličkog otpora za potpuno turbulentan režim

$f$  - Faningov koeficijent hidrauličkog otpora

$\varepsilon$  - hrapavost cevi (m)

Re- Rejnoldsov broj

$D_u$  - unutrašnji prečnik cevi (m)

R - unutrašnji poluprečnik cevi (m)

W - Lambertova funkcija

x - argument Lambertove funkcije

$\omega$  - 'pomerena' Bojdova funkcija

y - argument 'pomerene' Bojdove funkcije

A, B,  $\Theta_1, \Theta_2, \Psi, \alpha, \Omega, O_1, O_2, O_3$  - pomoćne oznake definisane u tekstu

## LITERATURA

- [1] Sukharev MG, Karasevich AM, Samoilov RV, Tverskoi IV, Investigation of the hydraulic resistance in polyethylene pipelines, Journal of Engineering Physics and Thermophysics, 2005, 78(2), 350-359.
- [2] Coelho PM, Pinho C, Considerations about equations for steady state flow in natural gas pipelines, Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering, 2007, 29(3), 262-273.
- [3] Renouard P, Nouvelle méthode pour le calcul des réseaux maillés de conduites de gaz, Communication au Congrès du Graz, 1952.
- [4] Prandtl L, The mechanics of viscous fluids, In: Durand WF, editor. Aerodynamic theory, vol. III (Division G); 1935, 34–208.
- [5] Colebrook CF, White CM, Experiments with fluid friction in roughened pipes, Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences, 1937, 161(906), 367-381.
- [6] Colebrook CF, Turbulent flow in pipes with particular reference to the transition region between the smooth and rough pipe laws, Journal of the Institution of Civil Engineers (London), 1939, 11(4), 133-156.
- [7] Brown GO, The history of the Darcy-Weisbach equation for pipe flow resistance. Proceedings of the Environmental and Water Resources History, 2002, <http://biosystems.okstate.edu/darcy/DarcyWeisbach/HistoryoftheDarcyWeisbachEq.pdf>, 34-43.
- [8] Lahiouel Y, Haddad A, Evaluation of energy losses in pipes, Proceedings of the 6<sup>th</sup> Saudi Engineering Conference KFUPM, Dhahran, 2002, 5: <http://faculty.kfupm.edu.sa/EE/ajmal/conf/SEC2002/vol5/P577.pdf>, 577-589.



- [9] Nekrasov B, *Hydraulics*, Moscow, 1969.
- [10] Churchill SW, Friction-factor equation spans all fluid flow regimes, *Chemical Engineering*, 1977, 84(24), 91–92.
- [11] Chen NH, An explicit equation for friction factor in pipes, *Industrial and Engineering Chemistry Fundamentals*, 1979, 18(3), 296–297.
- [12] Chen NH, Comments on ‘An explicit equation for friction factor in pipes’, *Industrial and Engineering Chemistry Fundamentals*, 1980, 19(2), 229–230.
- [13] Schorle BJ, Churchill SW, Shacham M, Chen NH, Comments on ‘An explicit equation for friction factor in pipes’, *Industrial and Engineering Chemistry Fundamentals*, 1980, 19(2), 228–229.
- [14] Wood DJ, An explicit friction factor relationship, *Civil Engineering*, 1966, 36(12), 60–61.
- [15] Brkić D, Solution of the implicit Colebrook-White equation using Excel, *Hydrocarbon Processing* 2009, /in press, accepted for publication 14.11.2008/
- [16] Wright EM, Solution of the equation  $ze^z=a$ , *Bulletin of the American Mathematical Society*, 1959, 65 (2), 89-93.
- [17] Corless RM, Gonnet GH, Hare DEG, Jeffrey DJ, Knuth DE, On the Lambert W function, *Advances in Computational Mathematics*, 1996.5 (4), 329-359.
- [18] Boyd JP, Global approximations to the principal real-valued branch of the Lambert W-function, *Applied Mathematics Letters*, 1998, 11(6), 27-31.
- [19] Barry DA, Parlange J-Y, Li L, Prommer H, Cunningham CJ, Stagnitti F, Analytical approximations for real values of the Lambert W-function, *Mathematics and Computers in Simulation*, 2000, 53(1-2), 95-103.
- [20] Barry DA, Parlange J-Y, Li L, Prommer H, Cunningham CJ, Stagnitti F, Erratum: Analytical approximations for real values of the Lambert W-function (*Mathematics and Computers in Simulation* (2000) 53 (95-103): S0378475400001725), *Mathematics and Computers in Simulation*, 2002, 59(6), 543.
- [21] Clamond D, Efficient resolution of the Colebrook equation, *Industrial and Engineering Chemistry Research*, 2009, 48(7), 3665–3671.
- [22] Barry DA, Parlange J-Y, Sander GC, Sivaplan M, A class for exact solution for Richards’ equation *Journal of Hydrology*, 1993, 142(1-4), 29-46.
- [23] Goudar CT, Sonnad JR, Explicit friction factor correlation for turbulent flow in smooth pipes, *Industrial and Engineering Chemistry Research*, 2003, 42(12), 2878-2880.
- [24] Sonnad JR, Goudar CT, Constraints for using Lambert W function-based explicit Colebrook-White equation, *Journal of Hydraulic Engineering ASCE*, 2004, 130(9), 929-931.
- [25] Sonnad JR, Goudar CT, Explicit friction factor correlation for pipe flow analysis, *Hydrocarbon Processing*, 2005, 84(6), 103-105.
- [26] Sonnad JR, Goudar CT, Explicit reformulation of the Colebrook-White equation for turbulent flow friction factor calculation, *Industrial and Engineering Chemistry Research*, 2007, 46(8), 2593-2600.
- [27] More AA, Analytical solutions for the Colebrook and White equation and for pressure drop in ideal gas flow in pipes, *Chemical Engineering Science*, 2006, 61(16), 5515–5519.
- [28] Nandakumar V, Analytical calculation of Fanning friction factor, *Hydrocarbon Processing*, 2007, 86(1), 97-100.
- [29] Concha F, Settling velocities of particulate systems 15: Velocities in turbulent Newtonian flows, *International Journal of Mineral Processing*, 2008, 88(3-4), 89–93.
- [30] Brkić D, Comments on ‘Settling velocities of particulate systems 15: Velocities in turbulent Newtonian flows’, *International Journal of Mineral Processing*, 2009, 92(3-4), 201-202.
- [31] Komatina D, Otpori trenja u prirodno uređenim rečnim tokovima, *Vodoprivreda*, 2002, 34(1-6), 53-60.
- [32] Komatina D, Hidraulički proračun prirodno uređenih rečnih tokova, *Vodoprivreda*, 2003, 35(3-4), 221-230.
- [33] Samardžioska T, Popov V, Numeričko upoređivanje konceptualno različitih modela protoka i transporta u poroznoj sredini, *Vodoprivreda*, 2007, 39(1-3), 3-16.
- [34] Đukić V, Proračun infiltracije vode u nezasićeno zemljište, *Vodoprivreda*, 2005, 37(4-6), 229-238.
- [35] Parlange J-Y, Barry DA, Haverkamp R, Explicit infiltration equations and the Lambert W function, *Advances in Water Resources*, 2002, 25(8-12), 1119–1124.

## USAGE OF LAMBERT-W FUNCTION IN CALCULATION OF FLOW FRICTION IN PIPES

by

Dejan BRKIĆ

Ministry of Science and Technological Development, Belgrade

## Summary

Colebrook's equation for the calculation of Darcy's coefficient of hydraulics resistance is given in implicit form, and hence for its solution some sort of numerical iterative solution has to be used. The Lambert W function is a transcendental function as well given in implicit form and defined solely by applying elementary functions. It can be used for exact mathematical transformation of Colebrook's equation in explicit form which is not an approximation of the original implicit function, but since it contains Lambert

W function, it cannot be solved without some approximations. The main advantage is that approximate values of the Lambert W function can be determined very accurately and often using non-iterative numerical methods. In addition to the two original forms of the transformed Colebrook's equation, a procedure for their solution is presented in the paper..

Key words: Hydraulics friction, Colebrook relation

Redigovano 22.07.2009.