

## NUMERIČKO MODELIRANJE BRZOTOKA U KRIVINI

Mr Ljubomir BUDINSKI, dipl.inž.građ.  
Građevinski fakultet u Subotici, E-mail: ljubab@eunet.yu  
V.prof.dr. Ljubodrag SAVIĆ  
Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu

### REZIME

Prikazan je ravanski (2D) numerički model nejednolikog ustaljenog tečenja u brzotoku sa horizontalnom krivinom trase korita. Primene metode *MacCormack* i *MUSCL*, poboljšane sa *TVD* članom. Dobijeni rezultati numeričkih modela su upoređeni sa eksperimentalnim rezultatima.

**Ključne reči:** buran tok, kosi stojeći talas, ravanski modeli, numeričke metode, tečenje u krivini.

### 1. UVOD

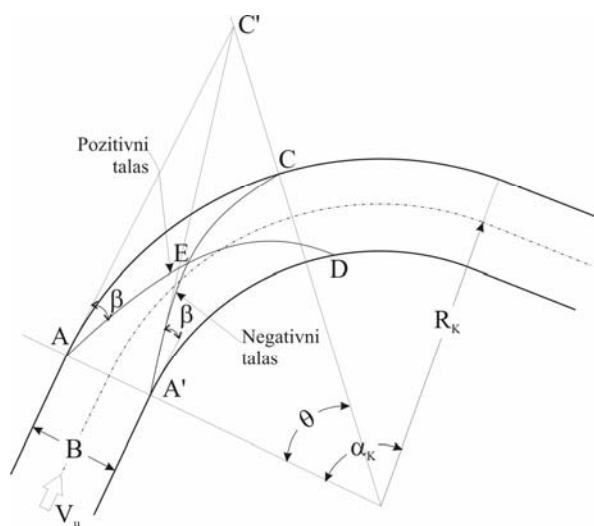
U brzotoku sa horizontalnom krivinom nastaje složeno strujanje, koje u proizvoljnom slučaju nije moguće ispravno opisati analitičkim rešenjem. Buran tok, u kome preovlađuju inercijalni uticaji usled promene pravca strujanja, karakterišu nagle promene dubine, tzv. kosi stojeći (strmi) talasi. Pri projektovanju brzotoka potrebno je ovakvo tečenje što potpunije sagledati. Mada je reč o prostornoj (3D) pojavi, iskustvo pokazuje da se nagle promene toka (prolom brana na pr.) mogu uspešno opisati ravanskim (2D) modelom. Stoga su i ovde primenjeni *ravanski* (2D) numerički modeli, zasnovani na Reynolds-ovim jednačinama, osrednjenim po dubini (pretpostavlja se hidrostatički raspored pritisaka). Korišćene su metode *MacCormack* i *MUSCL*, dopunjene *TVD* (Total Variation Diminishing) članom, radi eliminisanja neželjenih numeričkih parazita. Rezultati ove dve metode upoređeni su međusobno, kao i sa eksperimentalnim vrednostima.

Ovaj rad predstavlja nastavak istraživanja koja su objavljena u prethodnom članku (Budinski i Savić 2005).

### 2. TEORIJSKE OSNOVE

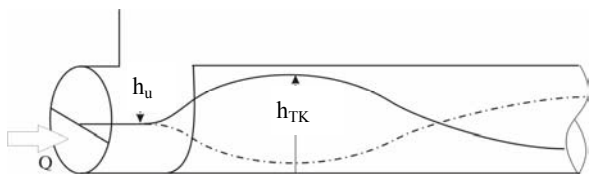
Buran tok u krivini karakterišu poremećaji, u vidu pozitivnih i negativnih talasa, čiji intenzitet i oblik

zavise od geometrije kanala i uslova tečenja. Linije poremećaja su šematski prikazane na Slici 1.



Slika 1. Šematski prikaz krivine sa osnovnim elementima burnog tečenja

Uticaji usled skretanja zidova korita, pronose se duž linija poremećaja pod promenljivim talasnim uglom  $\beta$  u odnosu na dolazni tok (Slika 1). Duž spoljne strane krivine (konkavni zid) nastaju pozitivni (konvergentni) poremećaji, što izaziva izdizanje površine vode i stvaranje *primarnog* strmog talasa visine  $h_{TK}$  (Slika 2), kao i opadanje brzine i Frudovog broja. Talasni ugao  $\beta$  se povećava duž krivine, zbog čega u kombinaciji sa smerom kretanja, nastaje konvegencija linija poremećaja. Na unutrašnjoj strani (konveksni zid), nastaju negativni poremećaji koji divergiraju, što za posledicu ima porast Frudovog broja i povećanje talasnog ugla  $\beta$ .



Slika 2. Poprečni presek krivine u burnom režimu

Intenzitet-visina poremećaja (strmog talasa), kao i njegov položaj (ugaono rastojanje do maksimuma stojećeg talasa- $\theta$ , sl.1) zavisi od uslova tečenja i geometrije kanala (radijus krivine  $R_K$ , ugao zakrivljenosti  $\alpha_K$ ). Nastale pozitivne i negativne linije poremećaja skreću tok, a usled njihovog sudara ovo skretanje se dodatno povećava. Kada prvi negativni poremećaj dopre do spoljnog zida, javlja se negativna refleksija, pa nivo počinje da opada. Zato tačka preseka (tačka C) prve negativne linije poremećaja predstavlja mesto pojave maksimalne dubine koju tok može dostići duž spoljnog zida (Raus,1969). Na unutrašnjem zidu, kako je već pomenuto, javlja se depresija, koja u zavisnosti od geometrijskih uslova može prouzrokovati odvajanje mlaza od zida kanala. Takođe, primećuje se da trougao  $AEA'$  (Slika 1) obuhvata jednu zonu neporemećenog strujanja, kao i u slučaju kanalskih suženja i proširenja.

Kao primer prikazan je mlaz u krivini na Slici 3, za skretni ugao  $\alpha_K=45^\circ$  i radijus krivine  $R_K=2B$ , a pri Froude-ovom broju na ulazu  $Fr_u=3$ , gde se jasno uočavaju sve prethodno opisane pojave (stojeći talasi, odvajanje mlaza).



Slika 3. Mlaz u krivini – pogled u smeru toka

### 3. NUMERIČKI MODEL

Jednačine ravanskog toka (Reynolds-ove jednačine osrednjene po dubini, sa pretpostavkom o hidrostatičkom rasporedu pritisaka) napisace se u konzervativnom ("divergentnom") obliku, što omogućava modeliranje poremećaja sa strmim čelom (Jovanović, 1998) :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} + S = 0, \quad (1)$$

gde je :

$$U = \begin{Bmatrix} h \\ uh \\ vh \end{Bmatrix}, \quad E = \begin{Bmatrix} uh \\ u^2h + \frac{1}{2}gh^2 \\ uvh \end{Bmatrix}, \quad (2)$$

$$F = \begin{Bmatrix} vh \\ uvh \\ v^2h + \frac{1}{2}gh^2 \end{Bmatrix}, \quad S = \begin{Bmatrix} 0 \\ -gh(I_{ox} - I_{ix}) \\ -gh(I_{oy} - I_{iy}) \end{Bmatrix}, \quad (3)$$

$$I_{ox} = \frac{\partial z_d}{\partial x}; \quad I_{oy} = \frac{\partial z_d}{\partial y}; \quad (4)$$

$$I_{ox} = \frac{n^2 u \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{4/3}}; \quad I_{oy} = \frac{n^2 v \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{4/3}}. \quad (5)$$

Za rešavanje ovih jednačina, korišćene su dve numeričke metode :

- *MacCormack – TVD* i
- *MUSCL – TVD*,

s obzirom na njihovu dobru reputaciju u modeliranju strujanja sa naglim promenama dubine i proticaja. Sledi kratak opis ovih metoda.

#### • *Metoda MacCormack – TVD*

MacCormack metoda konačnih razlika sadrži dva koraka (Vincent et al. 2001, Liu 2001, Jovanović 1998). U prvom, "prediktor", koraku predviđaju se vrednosti zavisno promenljivih, na osnovu poznatih vrednosti sa prethodnog vremenskog nivoa. U drugom, "korektor", koraku se koriguju vrednosti iz prediktor koraka, a krajnje rešenje se dobija osrednjavanjem, uz dodatak TVD člana, čija je uloga da smanji, ili potpuno otkloni numeričke oscilacije.

- Prediktor korak :

$$U_{i,j}^* = U_{i,j}^k - \frac{\Delta t}{\Delta x} \nabla_x E_{i,j}^k - \frac{\Delta t}{\Delta y} \nabla_y F_{i,j}^k - \Delta t S_{i,j}^k, \quad (6)$$

- Korektor korak :

$$U_{i,j}^{**} = U_{i,j}^k - \frac{\Delta t}{\Delta x} \Delta_x E_{i,j}^* - \frac{\Delta t}{\Delta y} \Delta_y F_{i,j}^* - \Delta t S_{i,j}^*, \quad (7)$$

- Nova vrednost :

$$U_{i,j}^{k+1} = \frac{1}{2} [U_{i,j}^k + U_{i,j}^{**}] + \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ R_{i+\frac{1}{2},j} \Phi_{i+\frac{1}{2},j} - R_{i-\frac{1}{2},j} \Phi_{i-\frac{1}{2},j} \right] + \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta t}{\Delta y} \left[ N_{i,j+\frac{1}{2}} \Theta_{i,j+\frac{1}{2}} - N_{i,j-\frac{1}{2}} \Theta_{i,j-\frac{1}{2}} \right], \quad (8)$$

gde su :

- komponenta vektora  $\Phi_{i+\frac{1}{2},j}$  u x-pravcu

$$\phi_{i+\frac{1}{2},j}^l = \left[ \Psi \left( a_{i+\frac{1}{2},j}^l \right) - \frac{\Delta t}{\Delta x} a_{i+\frac{1}{2},j}^2 \right] \cdot \left( \alpha_{i+\frac{1}{2},j}^l - \varphi \left( \alpha_{i+\frac{1}{2},j}^l \right) \right), \quad (9)$$

gde  $k$  označava vremenski nivo.

#### • Shema MUSCL – TVD

Druga metoda za numeričko modeliranje ravanskih tokova, korišćena u ovom radu, je **MUSCL–TVD** metoda (Monotone Upstream Scheme for Conservation Laws), iz grupe šema zasnovanih na razdvajanju razlike fluksa (Budinski 2004, Naoya i Tomoyuki 1989, Haim i Eitan 1990).

$$U_{i,j}^{k+1} = U_{i,j}^k - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ \tilde{E}_{i+\frac{1}{2},j}^k - \tilde{E}_{i-\frac{1}{2},j}^k \right] - \frac{\Delta t}{\Delta y} \left[ \tilde{F}_{i,j+\frac{1}{2}}^k - \tilde{F}_{i,j-\frac{1}{2}}^k \right] - \Delta t S_{i,j}^k. \quad (10)$$

Vrednosti fluksa u  $i$  pravcu  $\tilde{E}_{i+\frac{1}{2},j}^k, \tilde{E}_{i-\frac{1}{2},j}^k$  dobijaju se interpolacijom :

$$\tilde{E}_{i+\frac{1}{2},j}^k = \frac{1}{2} \left[ E_{(i+\frac{1}{2})R,j}^k + E_{(i+\frac{1}{2})L,j}^k \right] - \frac{1}{2} \left[ A_{(i+\frac{1}{2})j}^k \left( U_{(i+\frac{1}{2})R,j}^k - U_{(i+\frac{1}{2})L,j}^k \right) \right], \quad (11)$$

$$\tilde{E}_{i-\frac{1}{2},j}^k = \frac{1}{2} \left[ E_{(i-\frac{1}{2})R,j}^k + E_{(i-\frac{1}{2})L,j}^k \right] - \frac{1}{2} \left[ A_{(i-\frac{1}{2})j}^k \left( U_{(i-\frac{1}{2})R,j}^k - U_{(i-\frac{1}{2})L,j}^k \right) \right]. \quad (12)$$

Na sličan način izračunavaju se i  $\tilde{F}_{i,j+\frac{1}{2}}^k, \tilde{F}_{i,j-\frac{1}{2}}^k$  u  $j$  pravcu.

Vrednosti nepoznatih  $U_{(i+\frac{1}{2})R,j}^k, U_{(i+\frac{1}{2})L,j}^k$  u  $x$ -pravcu

dobijaju se prema izrazu :

$$U_{(i+\frac{1}{2})L,j}^k = U_{i,j}^k + \frac{1}{4} \left[ (1-k) \bar{\nabla}_x U_{i,j}^k + (1+k) \bar{\Delta}_x U_{i,j}^k \right] \\ U_{(i+\frac{1}{2})R,j}^k = U_{i,j}^k - \frac{1}{4} \left[ (1-k) \bar{\Delta}_x U_{i+1,j}^k + (1+k) \bar{\nabla}_x U_{i+1,j}^k \right], \quad (13)$$

gde su :

$$\left. \begin{aligned} \bar{\nabla}_x &= \min \text{mod}(\nabla_x, \Delta_x) \\ \bar{\Delta}_x &= \min \text{mod}(\Delta_x, \nabla_x) \end{aligned} \right\} \text{ za } x \text{ pravac .}$$

#### • Računska mreža

Da bi se računaska oblast složenog oblika lakše opisala, a granični uslovi tačnije definisali, korišćena je *neortogonalna mreža krivolinijskih koordinata* (Liu 2001, Jovanović 1998, Simmonds 1982). Fizička oblast, prekrivena krivolinijskim koordinatama, transformiše se (rešavanjem sistema Laplace-ovih jednačina) u oblast jednostavne geometrije, u kojoj se obavlja proračun.

#### 4. PREGLED I ANALIZA REZULTATA

Osnovni cilj istraživanja je da se procene mogućnosti modeliranja tečenja u krivini brzotoka predloženim numeričkim metodama. Uz to, prikazaće se i rezultati koji mogu biti korisni za sagledavanje poremećaja u burnom toku u krivini, pre svega zavisnost visine i položaja talasa od geometrijskih elemenata krivine (radijus  $R_K$  i skretni ugao  $\alpha_K$ , Slika 1) i uslova tečenja ispred krivine (ulazni Froude-ov broj  $Fr_u$ ). Primenom prethodno opisanih metoda, izvršeni su numerički "eksperimenti" za sledeće geometrijske uslove :

- Skretni ugao  $\alpha_K$  :
  - ◆  $\alpha_K = 22,5^\circ$ ,
  - ◆  $\alpha_K = 45^\circ$ ,
  - ◆  $\alpha_K = 67,5^\circ$ , i
  - ◆  $\alpha_K = 90^\circ$ ,
- Radijus krivine  $R_K$ 
  - ◆  $R_K = 1B$ ,
  - ◆  $R_K = 2B$  i
  - ◆  $R_K = 3B$ .

Opseg vrednosti Froude-ovog broja na ulazu u kanal (uzvodni granični uslov)  $Fr_u$  je:

- $Fr_u = 10 \div 100$ ,

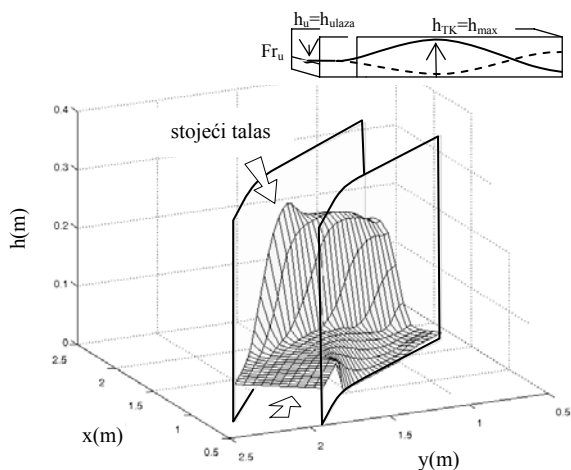
dok je širina pravougaonog kanala :

- $B = 0,5m$ .

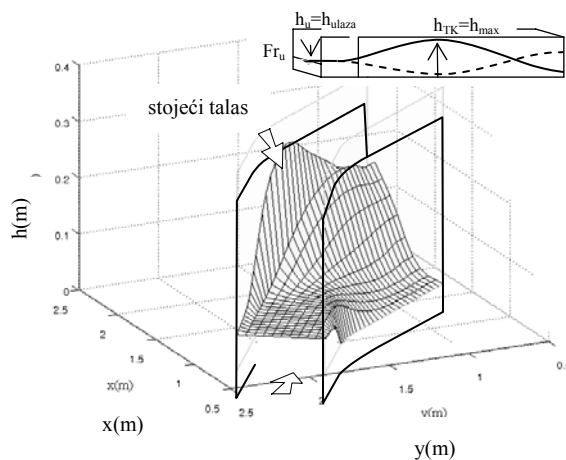
Prikazani su prostorni rasporedi dubina i vektorsko polje brzina, koji su međusobno poređeni za dve razmatrane metode, kao i sa odgovarajućim eksperimentalnim podacima.

- **Skretni ugao krivine  $\alpha_K=22,5^\circ$**

Na Slikama 4 i 5, za obe razmatrane numeričke metode prikazan je prostorni raspored dubina (nivoa)  $h$  pri skretnom uglu od  $\alpha_K = 22,5^\circ$ , radijusu krivine od  $R_K = 2B$  i za vrednost Froude-ovog broja na ulazu od  $Fr_u=50$ , dok je vektorsko polje brzina prikazano na Slikama 6 i 7.

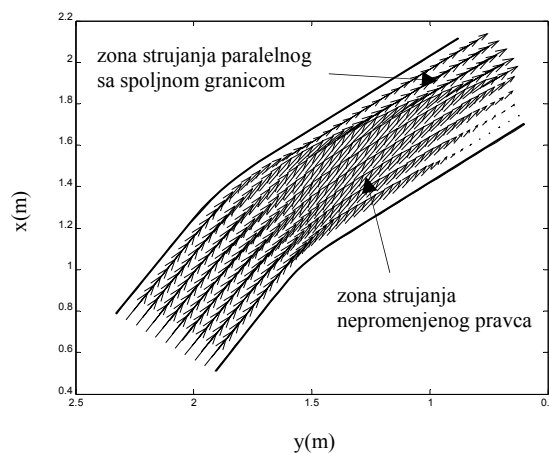


Slika 4. Prostorni prikaz nivoa pri skretanju kanala za ugao  $\alpha_K = 22,5^\circ$  i  $Fr_u=50$  dobijeno MUSCL – TVD šemom; prostorni korak  $dx=0,05m$ ,  $dy=0,05m$ ; radijus krivine  $R_K=2B$

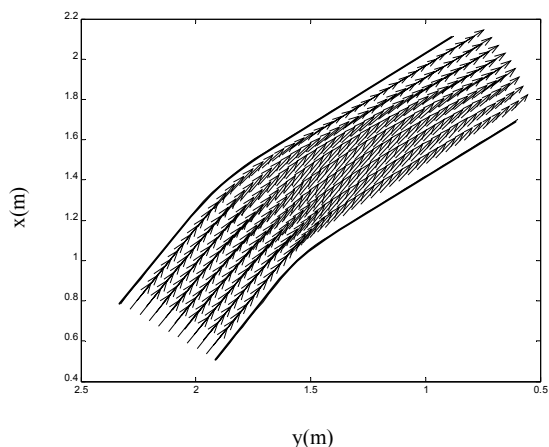


Slika 5. Prostorni prikaz nivoa pri skretanju kanala za ugao  $\alpha_K = 22,5^\circ$  i  $Fr_u=50$  dobijeno MacCormack – TVD šemom; prostorni korak  $dx=0,05m$ ,  $dy=0,05m$ ; radijus krivine  $R_K=2B$

U krivini tok obrazuje dve zone. Prvu odlikuje strujanje paralelno sa spoljnom granicom (zidom) kanala, dok u drugoj zoni tok zadržava prvobitan pravac strujanja (sl. 6 i 7). Na konkavnoj strani krivine nastaje stojeći talasa visine  $h_{TK}$ , koji dostiže maksimum neposredno po završetku krivine, a zatim počinje da opada. Na suprotnoj, konveksnoj, strani kanala javlja se negativni talas i dubina  $h$  naglo pada, što je u saglasnosti sa prikazanim numeričkim rešenjima.

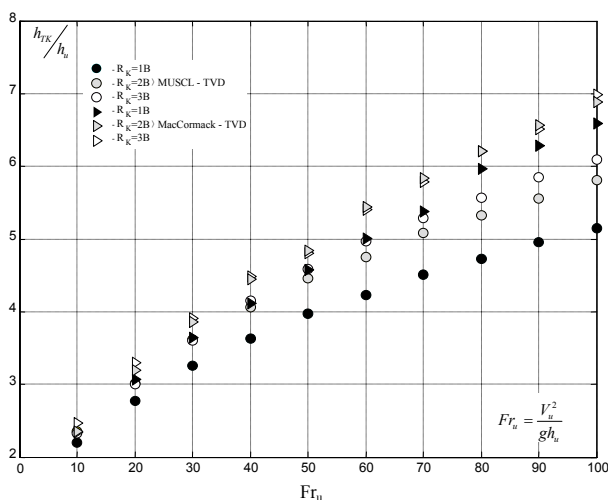


Slika 6. Vektorsko polje brzina pri skretanju kanala za ugao  $\alpha_K = 22,5^\circ$  i  $Fr_u=50$  dobijeno MUSCL – TVD šemom; prostorni korak  $dx=0,05m$ ,  $dy=0,05m$ ; radijus krivine  $R_K=2B$



Slika 7. Vektorsko polje brzina pri skretanju kanala za ugao  $\alpha_K = 22,5^\circ$  i  $Fr_u=50$  dobijeno MacCormack – TVD šemom; prostorni korak  $dx=0,05m$ ,  $dy=0,05m$ ; radijus krivine  $R_K=2B$

Na Slici 8 prikazana je zavisnost relativne visine talasa  $h_{TK}/h_u$  (odnos maksimalne visine talasa  $h_{TK}$  i dubine na ulazu  $h_u$ ), od Frudovog broja ulaznog mlaza,  $Fr_u$ , za sve tri razmatrane vrednosti zakrivljenosti ( $R_K/B=1,2$  i  $3$ ), a za skretni ugao od  $\alpha_K = 22.5^\circ$ .



Slika 8. Zavisnost relativne visine talasa  $h_{TK}/h_u$  od Frudovog broja  $Fr_u$  i zakrivljenosti, pri uglu skretanja kanala od  $\alpha_K=22,5^\circ$  (dobijeno šemama MUSCL – TVD i MacCormack – TVD)

Povećanjem inercijalne sile toka, izražene preko  $Fr_u$ , raste relativna visine talasa. Zanimljivo je primetiti da, u slučaju ovako malog skretnog ugla ( $\alpha_K=22,5^\circ$ ), relativna visina talasa raste sa povećanjem radijusa krivine, što je na prvi pogled nerazumno, ili bar neočekivano. Ovo je

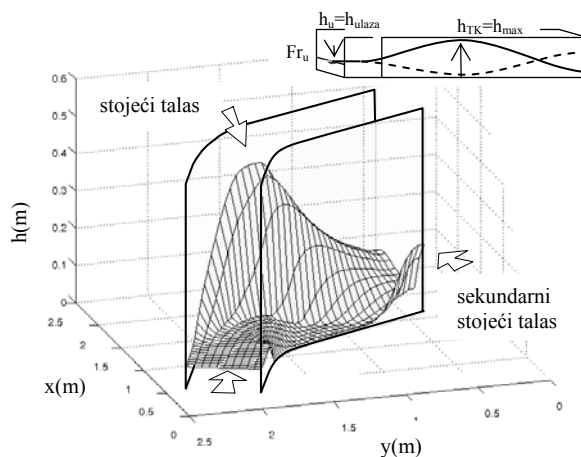
posledica male dužine luka krivine kod malih skretnih uglova, tako da talas ne stigne da se u potpunosti razvije na kratkoj krivolinijskoj deonici. (Kada bi poremećaj mogao da se potpuno razvije, razumno bi bilo očekivati da se visina talasa poveća sa zakrivljenošću, tj. sa smanjenjem radijusa.)

Na slici 8 uočavaju se značajne međusobne razlike između rezultata dobijenih metodama MUSCL i MacCormack. Odstupanja se povećavaju srazmerno vrednosti ulaznog Frudovog broja, pa su verovatno posledica različitog numeričkog sklopa dve metode (videti Budinski i Savić, 2005).

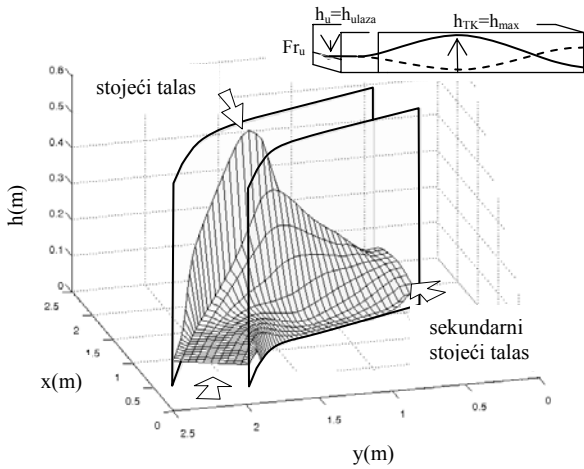
Stabilnost primenjenih numeričkih metoda, izražena preko kritičnog Courant-ovog broja,  $Cr_{kritično}$  (pri kome šema postaje nestabilna), ispitana je za sve razmatrane slučajeve. Pri skretnom uglu od  $\alpha_K = 22,5^\circ$ , metodu MUSCL–TVD odlikuje visok stepen stabilnosti, a kritična vrednost Courant-ovog broja kreće se u opsegu od  $0,80$  do  $0,88$ , zavisno od vrednosti  $Fr_u$ . MacCormack–TVD šema zahteva manje vrednosti za  $Cr_{kritično}$ , u granicama od  $0,32$  do  $0,66$ .

• **Skretni ugao krivine  $\alpha_K=45^\circ$**

Povećanje skretnog ugla krivine na  $\alpha_K = 45^\circ$ , izaziva složenije strujanje, sa većim poremećajima toka u odnosu na prethodni slučaj (sa uglom od  $22,5^\circ$ ). Usled strujanja od konkavnog ka konveksnom zidu sada se, pored primarnog stojećeg (strmog) talasa visine  $h_{TK}$  na konkavnoj strani kanala, obrazuje sekundarni talas uz konveksni zid (Slike 9 – 10).

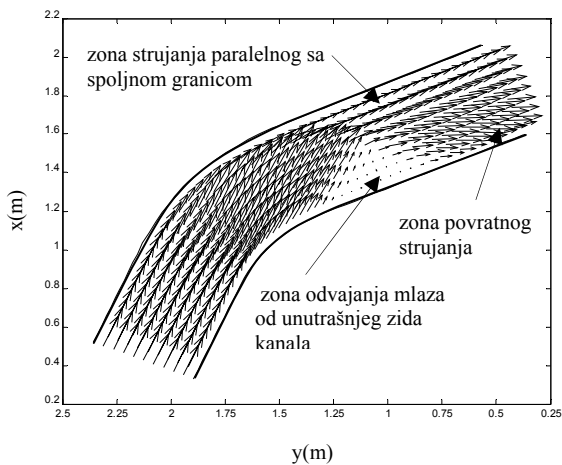


Slika 9. Prostorni prikaz nivoa pri skretanju kanala za ugao  $\alpha_K = 45^\circ$  i  $Fr_u=50$  dobijeno MUSCL – TVD šemom; prostorni korak  $dx=0,05m$ ,  $dy=0,05m$ ; radijus krivine  $R_K=2B$

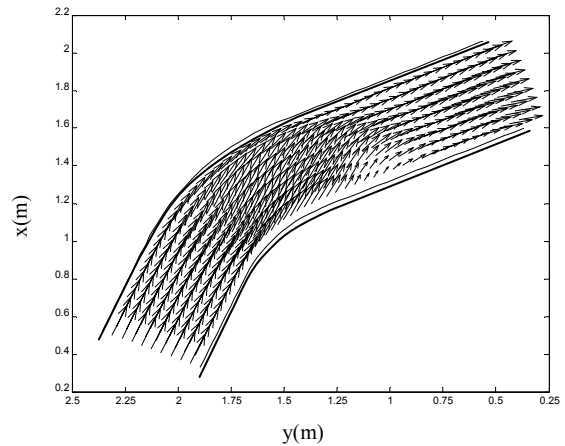


Slika 10. Prostorni prikaz nivoa pri skretanju kanala za ugao  $\alpha_K = 45^\circ$  i  $Fr_u=50$  dobijeno MacCormack – TVD šemom; prostorni korak  $dx=0,05m$ ,  $dy=0,05m$ ; radijus krivine  $R_K=2B$

Posledica ovakvog strujanja je izraženije odvajanje mlaza od konkavnog zida, koje se, za razliku od prethodno obrađenog slučaja, odvija u vidu polukružne putanje (Slike 11 – 12), čiji se radijus povećava sa ulaznim Frudovim brojem,  $Fr_u$ . Takođe, povećanjem  $Fr_u$  dolazi do porasta relativne visine talasa (Slika 13), gde metoda MacCormack (kao i u prethodnom slučaju) daje veće vrednosti nego MUSCL metoda.

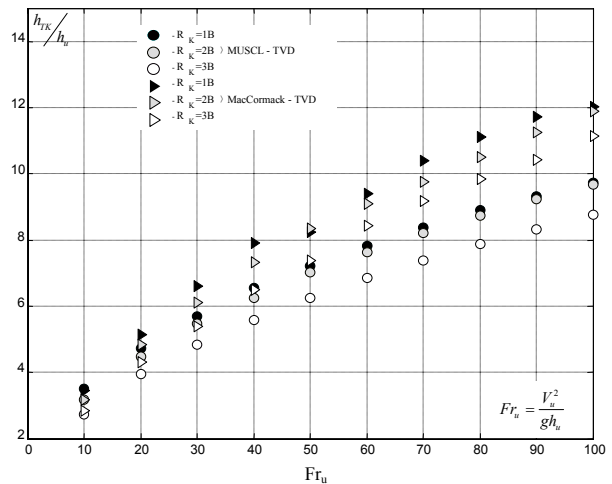


Slika 11. Vektorsko polje brzina pri skretanju kanala za ugao  $\alpha_K = 45^\circ$  i  $Fr_u=50$  dobijeno MUSCL – TVD šemom; prostorni korak  $dx=0,05m$ ,  $dy=0,05m$ ; radijus krivine  $R_K=2B$

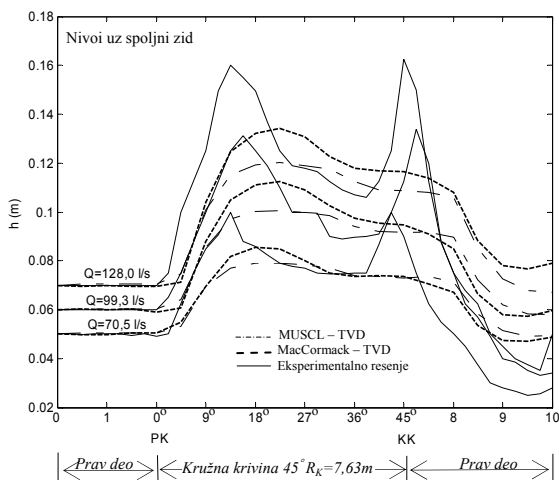


Slika 12. Vektorsko polje brzina pri skretanju kanala za ugao  $\alpha_K = 45^\circ$  i  $Fr_u=50$  dobijeno MacCormack – TVD šemom; prostorni korak  $dx=0,05m$ ,  $dy=0,05m$ ; radijus krivine  $R_K=2B$

Nasuprot prethodnom slučaju sa malim skretnim uglom, ovde sa povećanjem radijusa krivine  $R_K$  opada relativna visina talasa ( $h_{TK}/h_u$ ). Pri većim skretnim uglovima ( $\alpha_K \geq 45^\circ$ ) primarni talas uz konkavni zid ima na raspolaganju potrebnu dužinu putanje da se potpuno razvije, pa poremećaj dostiže svoju potencijalno maksimalnu vrednost. Zato je sasvim razumljivo da je ovde intenzitet poremećaja srazmeran zakrivljenosti putanje, odnosno obrnuto srazmeran poluprečniku krivine (za razliku od malih skretnih uglova, kod kojih talas ne može da se u potpunosti razvije zbog nedovoljne dužine putanje).

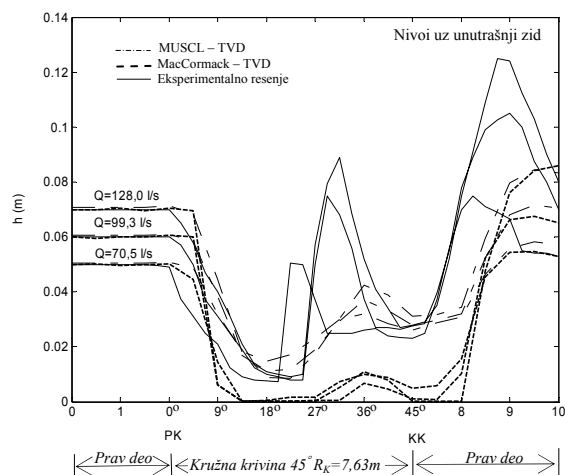


Slika 13. Zavisnost relativne visine talasa  $h_{TK}/h_u$  od Frudovog broja  $Fr_u$  i zakrivljenosti, pri uglu skretanja kanala od  $\alpha_K=45^\circ$  (dobijeno šemama MUSCL – TVD i MacCormack – TVD)



Slika 14. Podužni profil nivoa za konkavni zid krivine, pri uglu skretanja kanala  $\alpha_K=45^\circ$ , dobijen eksperimentalnim merenjima i numeričkim šemama MUSCL – TVD i MacCormack – TVD

Na Slikama 14 i 15 poredi se rezultati numeričkih metoda za dubinu toka (nivo) uz zidove kanala,  $h$ , sa vrednostima dobijenim eksperimentalnim merenjima (Raus 1969). Eksperimenti su rađeni na kanalu pravougaonog poprečnog preseka, širine  $B=0,467m$  i radijusa krivine  $R_K=7,63m$ , su proticaje od  $Q_1=70,5l/s$ ,  $Q_2=99,3 l/s$  i  $Q_3=128,0 l/s$ .



Slika 15. Podužni profil nivoa za konveksni zid krivine, pri uglu skretanja kanala  $\alpha_K=45^\circ$ , dobijen eksperimentalnim merenjima i numeričkim šemama MUSCL – TVD i MacCormack – TVD

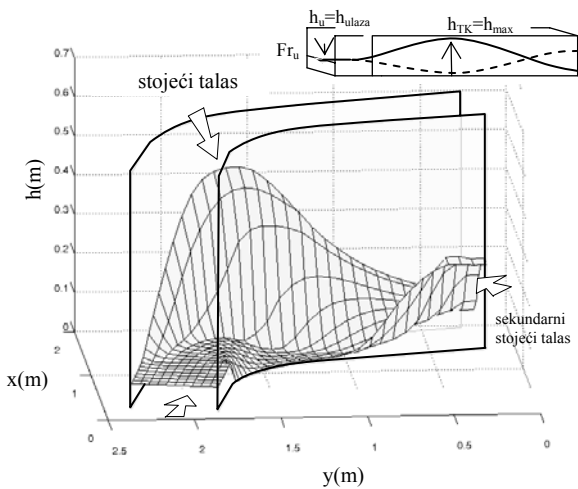
U celini se može uočiti da sračunati nivoi dobro prate oblik linija nivoa iz eksperimenta. Izuzetak je pojava drugog vrha na kraju krivine na konkavnom zidu, koji numeričke metode nisu „pokazale“. S druge strane, vrednosti nivoa dobijene numeričkim šemama pokazuju odstupanja u odnosu na merene vrednosti, posebno u oblastima oko vrhova (špicve) talasa. Ovo je najverovatnije posledica TVD člana, koji razmazuje špicve u numeričkom rešenju, ili/i nemogućnosti da se Reynoldsovim jednačinama opišu fluktuacije veličina. Uz to, ne bi trebalo omalovažiti ni uticaj izostavljanja vertikalnog ubrzanja toka (što je posledica primene ravanskog modela) na obrazovanje toka u krivini. Pored ovog sistematskog potcenjivanja špicve, odstupanja su najveća na konveksnom zidu krivine, i to kod MacCormack metode (sl. 15).

Analiza stabilnosti pokazuje da se metoda MUSCL–TVD, čije se vrednosti za  $Cr_{kritično}$  kreću u granicama od  $0,62 \div 0,94$  i u ovom slučaju odlikuje visokim stepenom stabilnosti. Šema MacCormack–TVD, sa vrednostima  $Cr_{kritično}$  u opsegu od  $0,24 \div 0,44$ , pokazuje trend pada kritičnog Courant-ovog broja sa porastom skretnog ugla krivine, čime znatno opada i efikasnost ove numeričke šeme.

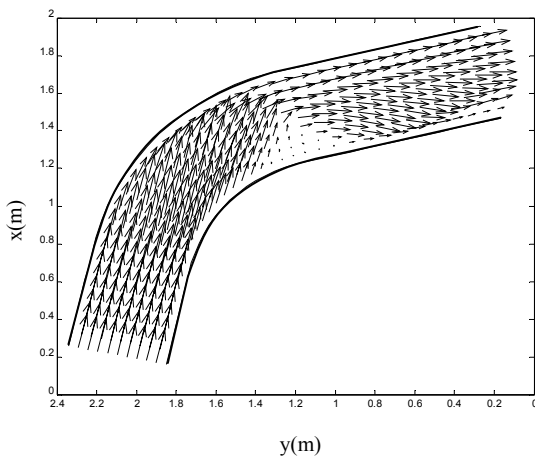
- **Skretni ugao krivine  $\alpha_K=67,5^\circ$**

Za ovu vrednost skretnog ugla, MacCormack metoda nije mogla da obezbedi stabilan proračun, sem za sasvim male vrednosti ulaznog Frudovog broja. Na drugoj strani, MUSCL metoda je, uz neznatan pad vrednosti kritičnog Kurantovog broja (u odnosu na  $\alpha_K = 45^\circ$ ), pokazala stabilan proračun za sve ispitivane vrednosti  $Fr_u$  i  $R_K$ . Prostorni raspored dubine (metodom MUSCL–TVD) za skretni ugao od  $\alpha_K = 67,5^\circ$  pri radijusu krivine  $R_K=2B$  i ulaznom Frudovom broju od  $Fr_u=50$  prikazan je na Slici 16, dok je vektorsko polje brzina dato na Slici 17. Pri ovom skretnom uglu javlja se slična strujna slika kao kod ugla od  $\alpha_K = 45^\circ$ , uz prisustvo stojećih (strmih) talasa i odvajanja mlaza, koji su u ovom slučaju intenzivniji. Posle udara u konkavni zid kanala mlaz obrazuje primarni stojeći (strmi) talas, odakle jednim delom nastavlja paralelno sa zidom, dok drugim krakom skreće ka konveksnom zidu gde stvara sekundarni talas. Zona odvajanja mlaza, polukružnog oblika (slika 17), zakrivljenija je nego pri manjim skretnim uglovima i pomera su u uzvodnom smeru, u odnosu na slučaj sa uglom od  $\alpha_K = 45^\circ$ .





Slika 16. Prostorni prikaz nivoa pri skretanju kanala za ugao  $\alpha_K = 67,5^\circ$  i  $Fr_u=50$  dobijeno MUSCL – TVD šemom; prostorni korak  $dx=0,075m$ ,  $dy=0,05m$ ; radijus krivine  $R_K=2B$



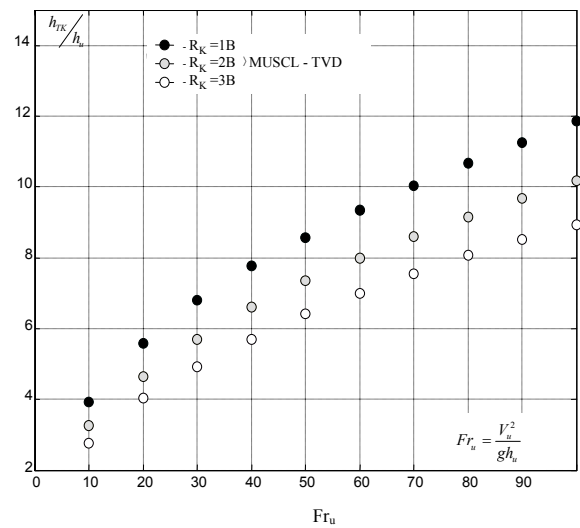
Slika 17. Vektorsko polje brzina pri skretanju kanala za ugao  $\alpha_K = 67,5^\circ$  i  $Fr_u=50$  dobijeno MUSCL – TVD šemom; prostorni korak  $dx=0,075m$ ,  $dy=0,05m$ ; radijus krivine  $R_K=2B$

Relativna visina stojećeg talasa ( $h_{TK}/h_u$ ), raste sa povećanjem Frudovog broja, i sa smanjenjem radijusa (Slika 18), kao i u slučaju skretnog ugla od  $\alpha_K = 45^\circ$ . Za skretni ugao od  $67,5^\circ$  dobijene su veće visine talasa nego pri uglu od  $45^\circ$ , jer je za veće skretanje toka potrebno uložiti i veću silu pritiska (veću dubinu).

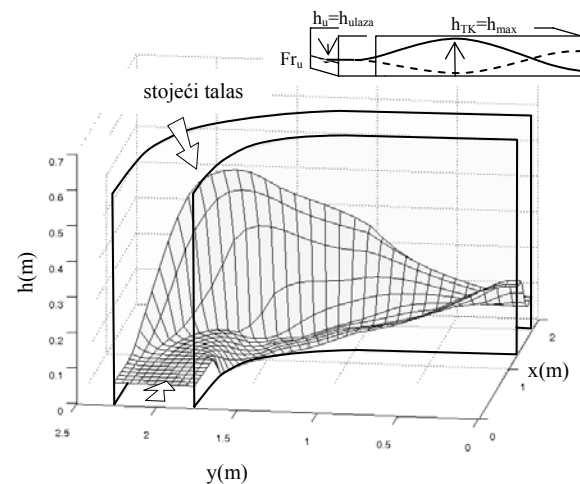
• **Skretni ugao krivine  $\alpha_K=90^\circ$**

Na kraju je razmatrano strujanje pri skretnom uglu od  $\alpha_K = 90^\circ$  (Slike 19÷21). I ovdje se MacCormack metoda

pokazala kao nestabilna već pri malim vrednostima ulaznog Frudovog broja, pa su prikazani samo rezultati dobijeni MUSCL–TVD metodom, koja je i dalje stabilno radila, sa prihvatljivo visokim vrednostima Kurantovog broja ( $Cr_{kritično}=0,40\div0,73$ ). Karakteristično je da kod većih skretnih uglova povratno strujanje gubi na intenzitetu sa porastom radijusa krivine  $R_K$  (pa čak i prestaje pri  $R_K \geq 2B$ ), tako da se tok bolje prilagođava pravcu konture konkavnog zida (Slike 17 i 20).

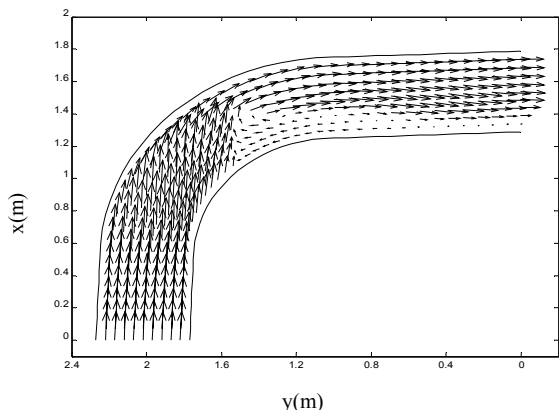


Slika 18. Zavisnost relativne visine talasa  $h_{TK}/h_u$  od Frudovog broja  $Fr_u$  i zakrivljenosti, pri uglu skretanja kanala od  $\alpha_K=67,5^\circ$  (dobijeno MUSCL – TVD šemom)

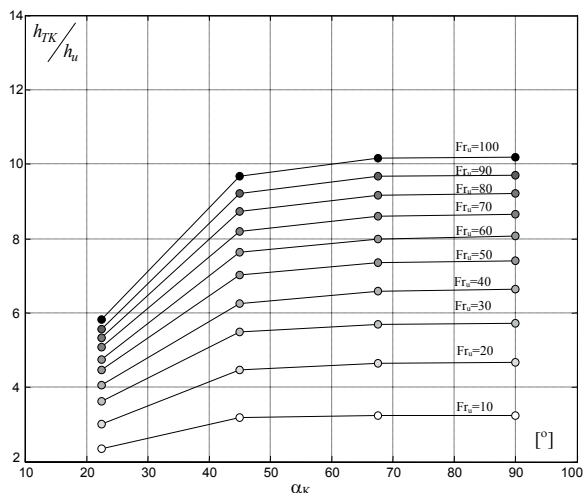


Slika 19. Prostorni prikaz nivoa pri skretanju kanala za ugao  $\alpha_K = 90^\circ$  i  $Fr_u=50$  dobijeno MUSCL – TVD šemom; prostorni korak  $dx=0,075m$ ,  $dy=0,05m$ ; radijus krivine  $R_K=2B$

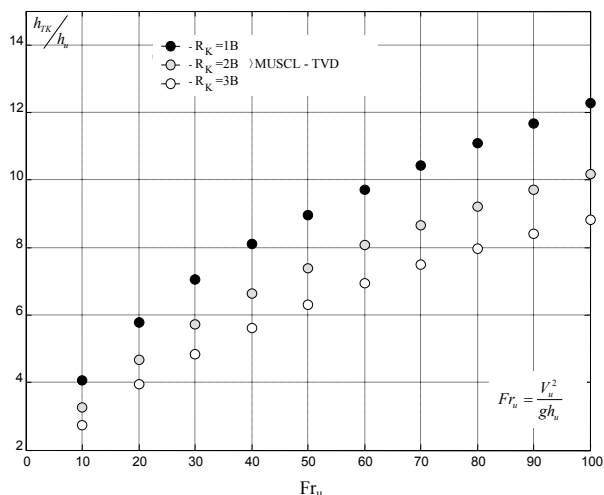




Slika 20. Vektorsko polje brzina pri skretanju kanala za ugao  $\alpha_K=90^\circ$  i  $Fr_u=50$  dobijeno MUSCL – TVD šemom; prostorni korak  $dx=0,075m$ ,  $dy=0,05m$ ; radijus krivine  $R_K=2B$



Slika 22. Zavisnost relativne visine talasa  $h_{TK}/h_u$  od Frudovog broja  $Fr_u$  i skretnog ugla za  $R_K=2B$  (dobijeno metodom MUSCL – TVD)



Slika 21. Zavisnost relativne visine talasa  $h_{TK}/h_u$  od Frudovog broja  $Fr_u$  i zakrivljenosti, pri uglu skretanja kanala od  $\alpha_K=22,5^\circ$  (dobijeno MUSCL – TVD šemom)

Upoređujući vrednosti relativne visine talasa pri skretnom uglu od  $\alpha_K = 90^\circ$  sa vrednostima dobijenim za ugao od  $67,5^\circ$ , primećuje se da su razlike u visini talasa veoma male. Ovo se jasnije uočava sa Slike 22, gde je prikazana zavisnost relativne visine talasa  $h_{TK}/h_u$  od skretnog ugla  $\alpha_K$  i ulaznog Frudovog broja  $Fr_u$ , za krivinu sa radijusom  $R_K=2B$ .

Visina talasa raste do skretnog ugla od  $\alpha_K = 45^\circ$ , da bi se zatim uspostavila skoro konstantna vrednost, nezavisna od skretnog ugla. Pri radijusu  $R_K=1B$  ova tendencija je manje izražena, tako da sa porastom ugla  $\alpha_K$  raste i visina stojećeg talasa, što je posledica oštre krivine u kojoj se tok teže prilagođava pravcu konture.

### 5. ZAKLJUČCI

Da bi se što tačnije opisalo strujanje u brzotoku sa krivinom u horizontalnoj trasi korita, jednačine ravanskog toka modelirane su pomoću dve numeričke metode, MUSCL–TVD i MacCormack–TVD. U cilju vrednovanja primenjenih metoda, vršeni su „numerički eksperimenti“ za četiri različita skretna ugla krivine, u širokom opsegu vrednosti graničnih uslova.

Na osnovu rezultata proračuna zaključeno je da metoda MUSCL–TVD bolje opisuje razmatrana strujanja, kao i da omogućava veću stabilnost i efikasnost (*robustnija* je) u odnosu na MacCormack–TVD metodu.

Rezultati pokazuju da bi se prikazani MUSCL model mogao koristiti u preliminarnim fazama projektovanja pri dimenzionisanju i oblikovanju brzotoka. Za konačno rešenje (u glavnom projektu), preporučuje se primena fizičkog modela, radi provere rešenja predloženog na osnovu numeričkog modela.

Treba naglasiti da jednačine ravanskog (2D) toka zanemaruju vertikalna ubrzanja (osim gravitacionog), što u slučaju prostornog (3D) strujanja, koje se ovde razmatra, nije u potpunosti opravdano. U narednim fazama istraživanja trebalo bi proveriti rad opisanih numeričkih metoda na složenijim slučajevima strujanja i uraditi sistematsko poređenje rezultata proračuna sa laboratorijskim i/ili terenskim merenjima. Kasnije bi trebalo razviti prostorni (3D) numerički model i proceniti doprinos vertikalnih ubrzanja na kvalitet rezultata proračuna, a time ujedno i bolje oceniti opravdanost korišćenja 2D modela.

#### LITERATURA

- [1] Jovanović, M., *Osnove numeričkog modeliranja ravanskih tokova*, Građevinski fakultet, Beograd, 1998.
- [2] Vincent, S., Caltagirone, J-P., Bonneton, P., *Numerical modelling of bore propagation and run-up on sloping beaches using a MacCormack TVD scheme*, Journal of hydraulic research, Vol. 39, No. 1, 2001.
- [3] Liu Yu-Ling., *Study of the mathematical model for numerical solution of supercritical surface flows*, XXIX IAHR CONGRESS, Beijing, 2001.
- [4] Budinski, Lj., *Numeričko modeliranje toka u burnom režimu*, Magistarska teza, Građevinski fakultet, Subotica, 2004.
- [5] Budinski, Lj., i Savić, Lj., *Numeričko modeliranje brzotoka pri promeni pravca zida kanala*, Vodoprivreda, Januar-Jun, 2005.
- [6] Simmonds, J.G., *A Brief on Tensor Analysis*, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1982.
- [7] Rouse, H., *Tehnička hidraulika*, Građevinska knjiga, Beograd, 1969.
- [8] Naoya F., Tomoyuki H., EFFECTS OF THE ALFVÉN WAVE ON THE GRAVITATIONAL INSTABILITY IN THE INTERSTELLAR MEDIUM, University of Astrophysics, Nagoya, 1989.
- [9] Haim N., Eitan T., Non-oscillatory Central Differencing for Hyperbolic Conservation Laws, Journal of Computational Physics, New York, London, 1990.

## NUMERICAL MODELING OF A STEEP CHUTE WITH CURVATURE IN PLANE

by

Mr Ljubomir BUDINSKI, dipl.inž.građ.  
Faculty of Civil Engineering, Subotica, E-mail: ljubab@eunet.yu  
V.prof.dr. Ljubodrag SAVIĆ  
Faculty of Civil Engineering, Belgrade

#### Summary

Two-dimensional (2D) open-channel flow models for a steep chute with curvature in plane are developed. TVD McCormack and TVD MUSCL method have been used to facilitate an easy-to-use code. The performances of the numerical models

have been assessed, and compared with experimental results.

Key words: supercritical flow, oblique standing wave, two-dimensional models, numerical methods, flow in curved channels

Redigovano 09.10.2005.