

## MODELIRANJE ZAVISNOSTI DUBINE PODZEMNIH VODA OD PADAVINA NA DRENIRANIM PODRUČJIMA

Doc. dr Nevenka ĐUROVIĆ, E-mail: marasn@agrifaculty.bg.ac.yu  
Prof. dr Ružica STRIČEVIĆ, E-mail: sruzica@agrifaculty.bg.ac.yu  
Poljoprivredni fakultet, Nemanjina 6, Zemun

### REZIME

U radu je izvršeno modeliranje zavisnosti dubine podzemne vode od padavina na dreniranom području na kome su rastojanja između drenova 10 i 30 m. U cilju modeliranja stohastičkih procesa koji su u ovom radu od interesa upotrebljen je MA (*Moving Average*) model. Pretpostavljeno je da je red modela  $n$  poznat, procenjeni su parametri tako usvojenog MA modela i sračunata je vrednost kriterijuma  $J$ . Zatim je skicirana zavisnost kriterijuma  $J$  od vrednosti parametra  $n$  koji se kretao u opsegu od 1 do 35. Polazeći od malih vrednosti parametra  $n$  i njegovim postepenim povećavanjem vrednost kriterijuma značajno smanjuje sve do trenutka kada se daljim povećavanjem efekat na kriterijumu ne vidi. Plato funkcije se uspostavlja na  $n=27$ , i ova vrednost se može usvojiti za odgovarajući red modela. Ovako veliki red modela može se objasniti topografskim položajem dreniranog područja, ka kome gravitiraju vode sa okolnih viših terena. Vrednost srednje kvadratne greške značajno manja za drenažni sistem za manjim međudrenskim rastojanjem ( $L_1=10\text{m}$ )

Logično je očekivati da padavine ne utiču na nivo podzemnih voda momentalno, već da postoju izvesno kašnjenje, uslovljeno filtracionim karakteristikama zemljišta, pa je u analizu uvedeno kašnjenje 0-5 dana da bi se procenilo koliko ono utiče na vrednost kriterijuma  $J$ . Međutim, rezultati pokazuju da pretpostavka o značajnom uticaju kašnjenja na promenu nivoa podzemnih voda nije održiva. Za vrednosti koje su usvojene kao red modela i red kašnjenja ( $n=27, d=0$ ) prikazane su vrednosti visine vode iznad drena ( $h$ ), i to vrednosti dobijene merenjem i vrednosti koje sračunava model. Ovako dobijen MA model se prvenstveno može iskoristiti za višekoračnu predikciju procesa posledice  $y$  (nivo podzemnih voda) na osnovu merenja procesa uzroka  $x$  (padavine)

**Ključne reči:** odvodnjavanje, nivo podzemne vode i padavine, MA model

### UVOD

Statistički modeli imaju široku primenu u praksi odvodnjavanja. Proces filtracije vode kroz zemljište se može uspešno opisivati odgovarajućim statističkim modelima MA tipa. Na taj način se proces drenaže može okarakterisati funkcijama prenosa koje u sebi nose informaciju o tipu zemljišta, koeficijentu filtracije, hidrološkim karakteristikama i drugim važnim osobinama lokaliteta koji se razmatra. U ovom radu prikazano je modeliranje zavisnosti dubine podzemne vode od padavina na zemljištu dreniranom horizontalnom cevnom drenažom.

### MATERIJAL I METODE RADA

Istraživanja koja su prikazana u ovom radu izvedena su na oglednom dobru Radmilovac u blizini Beograda. Na drenažnom polju površine oko 1,5 ha zastupljeno je zemljište tipa euglej. Na celoj površini zemljište je ujednačenih osobina, sa nepovoljnim hemijskim, vodnim i vazdušnim osobinama. Sadržaj gline je visok po celoj dubini profila, i kreće se do 70%, udeo praha se kreće u intervalu 36-43% dok je sadržaj sitnog peska 25-31%. Zemljište je slabo alkalne reakcije, (vrednosti pH u  $\text{H}_2\text{O}$  se kreću 8.0-8.2. Filtracione karakteristike zemljišta ujednačene su na celoj površini i okarakterisane i sa koeficijentom filtracije  $1.17 \cdot 10^{-4} - 9.14 \cdot 10^{-4} \text{ms}^{-1}$ . Drenažni sistem ima dve varijante međudrenskog rastojanja: 10 i 30 m. Drenažne cevi, prečnika 0.05m se nalaze na prosečnoj dubini 0.9m. Samo drenažno polje nalazi se na topografski najnižem delu područja, i ka njemu gravitiraju vode sa okolnog, višeg terena.

U cilju modeliranja stohastičkih procesa koji su u ovom radu od interesa, moguće je upotrebiti poznate MA modele opisane u literaturi iz statističke analize [1,2]. Posmatraju se dva stohastička procesa  $\{x(k)\}$  i  $\{y(k)\}$ ,

pri čemu se, uslovno rečeno, prvi proces može smatrati uzrokom a drugi proces posledicom prvog. Dobar primer takvih procesa, u kontekstu ovog rada, su intenzitet atmosferskih padavina i nivo podzemnih voda u zemljištu. Potrebno je odrediti analitičku zakonitost po kojoj 'proces uzrok' generiše 'proces posledicu'.

Vrlo jednostavan model koji definiše ovu zavisnost dat je sledećom relacijom:

$$y(k) = b_0 x(k) + b_1 x(k-1) + \dots + b_m x(k-n) \quad (1)$$

i ona definiše u literaturi dobro poznati MA model. Naziv modela je nastao od reči "Moving Average".

Vrednost procesa  $y(k)$  se dobija u obliku linearne kombinacije (dakle neke ponderisane, prosečne vrednosti) na prozoru podataka  $\{x(k-n), x(k-n+1), \dots, x(k)\}$ , a kako vreme prolazi ovaj se prozor polako pomera. Osnovna osobina ovog modela jeste da je on linearan (jer je 'proces posledica' linearna funkcija vrednosti 'procesu uzroka') a parametar  $n$  iz relacije (1) se označava kao red MA modela.

Formirati MA model koji uspostavlja vezu između dva stohastička procesa podrazumeva da je potrebno odrediti red modela  $n$  a zatim i skup parametara  $\{b_0, b_1, \dots, b_n\}$ . Prilikom određivanja reda modela najčešće se koristi apriorno znanje o fizikalnosti procesa koji se modeliraju. Na primeru navedenih procesa atmosferskih padavina i dubine podzemnih voda, parametar  $n$ , grubo rečeno, mora biti u opsegu [3,30] jer je, na osnovu elementarnog poznavanja filtracionih karakteristika zemljišta, definisanih koeficijentom filtracije, jasno da uticaj padavina ne može iščeznuti za manje od 3 dana a sa druge strane ne može trajati ni duže od 30 dana nakon prestanka padavina. Zatim se pristupa određivanju nepoznatih parametara  $\{b_i, i=0, \dots, n\}$  modela i to kroz minimizaciju sledeće kriterijumske funkcije:

$$J = \frac{1}{N-n} \sum_{k=n+1}^N (y(k) - b_0 x(k) - b_1 x(k-1) - \dots - b_m x(k-n))^2 \quad (2)$$

gde je sa  $N$  označen broj merenja procesa  $\{x(k)\}$  i  $\{y(k)\}$  koja su nam dostupna. Minimizacija kriterijuma (2) je u literaturi poznata kao metod najmanjih kvadrata (LSM) i najjednostavnije ju je sprovesti ukoliko se funkcija  $J$  napiše u matricnoj formi:

$$J = \frac{1}{N-n} (Y - XB)^T (Y - XB) \quad (3)$$

pri čemu je:

$$Y = \begin{bmatrix} y(n+1) \\ y(n+2) \\ \vdots \\ y(N) \end{bmatrix}; X = \begin{bmatrix} x(n+1) & x(n) & \dots & x(1) \\ x(n+2) & x(n+1) & \dots & x(2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x(N) & x(N-1) & \dots & x(N-n) \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad (4)$$

Tada se parcijalnim diferenciranjem kriterijuma  $J$  po vektoru nepoznatih parametara  $B$ , i izjednačavanjem ovog izvoda sa nulom, dobijaju procene nepoznatih parametara:

$$\frac{\partial J}{\partial B} = -2X^T(Y - XB) = 0 \Rightarrow \hat{B} = (X^T X)^{-1} X^T Y \quad (5)$$

Međutim, logično je očekivati da padavine ne utiču na nivo podzemnih voda momentalno, već da postoji izvesno kašnjenje, uslovljeno filtracionim karakteristikama zemljišta. S obzirom da se drenažno polje nalazi na najnižem delu područja, ka njemu površinskim i podpovršinskim putem dotiču vode sa okolnog višeg terena. Tačnije rečeno, bilo je realno pretpostaviti da je zbog konfiguracije terena potrebno neko vreme da se ispolje svi uticaji na dubinu podzemne vode. Zato je u analizu je uvedeno kašnjenje 0-5 dana da bi se procenilo koliko ono utiče na vrednost kriterijuma  $J$ . Model dobija oblik:

$$y(k) = b_0 x(k-d) + b_1 x(k-1-d) + \dots + b_n x(k-n-d) \quad (6)$$

pri čemu je  $y(k)$  proces-posledica, tj nivo podzemnih voda u  $k$ -om trenutku merenja,  $x(k)$  proces uzrok (padavine) u  $k$ -om trenutku merenja, a  $d$  usvojeno transportno kašnjenje u modelu.

Kriterijumska funkcija dobija oblik:

$$J = \frac{1}{N-n-d} \sum_{k=n+1+d}^N (y(k) - b_0 x(k-d) - b_1 x(k-1-d) - \dots - b_m x(k-n-d))^2 \quad (7)$$

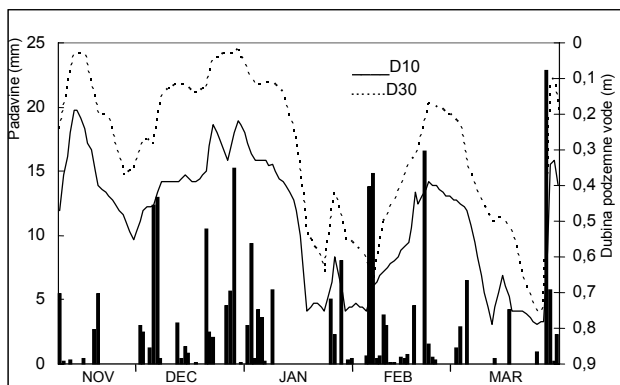
gde je sa  $N$  označen broj merenja procesa  $\{x(k)\}$  i  $\{y(k)\}$  koja su nam dostupna. Kao što je rečeno, usvojeni kriterijum  $J$  je suma kvadrata odstupanja i njegovom minimizacijom se dolazi do poznatog estimatora najmanjih kvadrata (LSM).

Što je vrednost ovog kriterijuma manja to je model uspešniji. Velika vrednost ovog kriterijuma može poticati iz tri različita razloga. Jedan od njih može ležati u nepreciznim merenjima procesa, drugi može biti taj

što zavisnost između procesa uopšte nije linearna već neka složena nelinearna funkcija, dok treći razlog može biti vezan za to da nije proces  $x$  jedini koji dominantno utiče na proces  $y$ , a zanemarivanje ostalih procesa uzroka će se automatski odraziti na vrednost kriterijumske funkcije.

## REZULTATI I DISKUSIJA

Statističko modeliranje zavisnosti isticanja vode iz drenova i dubine podzemnih voda od intenziteta atmosferskih padavina izvršeno je na osnovu podataka o dnevnim sumama padavina i podacima o dubini podzemnih voda u periodu nov 1996-mart 1997. Podaci o dnevnim sumama padavina kretali su se u granicama višegodišnjih proseka.



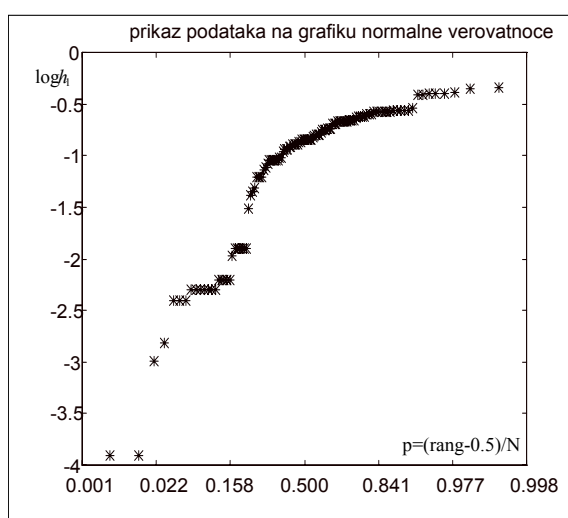
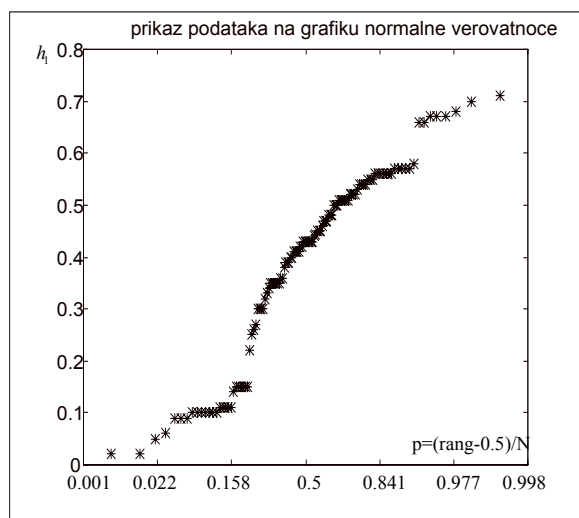
Slika 1. Sume dnevnih padavina i dubina podzemne vode

## OSOBINE MERENIH SEKVENCI DUBINA PODZEMNE VODE

Prethodnim istraživanjima je u cilju odgovarajuće statističke karakterizacije izvršena statistička analiza tipa raspodele merenih sekvenci U literaturi [3] je uobičajena provera normalnosti izmerenih serija koja se najčešće vrši prikazom podataka na normalnom papiru. U literaturi se za ovakve prikaze često koristi naziv QQ-kriva (*Quantile Curve*)

Ukoliko se na apscisu grafika unesu vrednosti  $F^{-1}((i-0.5)/n)$ , gde je  $i$  rang odgovarajućeg merenja,  $n$  ukupan broj merenja a  $F^{-1}(\cdot)$  inverzna funkcija raspodele za Gausovsku (odnosno normalnu) slučajnu promenljivu, a na ordinatu sama sortirana merenja  $\{y_i\}$ , dobiće se skup merenja koji će ležati približno na jednom linearnom segmentu, pod pretpostavkom da su merenje po svojoj raspodeli zaista bliska normalnoj raspodeli. Ukoliko dobijene tačke značajno odstupaju od trenda linearnog segmenta, utoliko je aktuelna raspodela značajno drugačija od normalne.

Na QQ - krivama za dubine podzemnih voda na obe varijante drenažnog sistema jasno se uočavaju ili kolena (prevoji u trendu) koji jasno naznačavaju nelinearnu (polinomijalnu) prirodu krive, ili su prisutni izraženi prekidu u kontinuitetu krivih (slika2).



Slika 2. Prikaz vrednosti  $h_1$  (visina voda iznad osovine drena) na papiru sa normalnom podelom i log  $h_1$  na papiru sa normalnom podelom (Varijanta 10m)

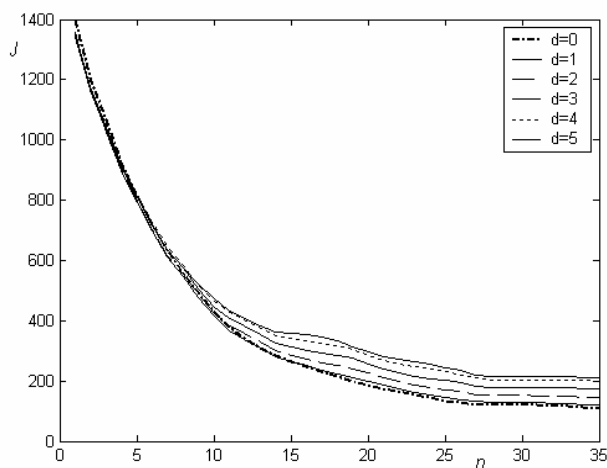
Napomena: N - ukupni broj podataka u sortiranom neopadajućem nizu

U cilju testiranja tipa raspodele za merne serije iskorišćen je dopunski test [3]. Naime, ponovo se formiraju QQ-krive, s tom razlikom da se na ordinate ne nanose prave vrednosti merenja već njihovi logaritmi. Ukoliko se sada dobije skup tačaka koji valjano aproksimira linearni segment, može se izvesti zaključak da je raspodela dobijenih podataka vrlo bliska Laplasovoj (dvostranoj eksponencijalnoj) raspodeli. Ovako dobijene QQ-krive za serije mernih podataka, pokazuju da ni jedan skup merenja ne podleže Laplasovom zakonu raspodele.

Osnovni cilj ovakvih statističkih analiza se sastoji u tome da se na osnovu zaključka o tipu raspodele merenih sekvenci, izvrši njihova odgovarajuća statistička karakterizacija.

### PRIMENA MA MODELA

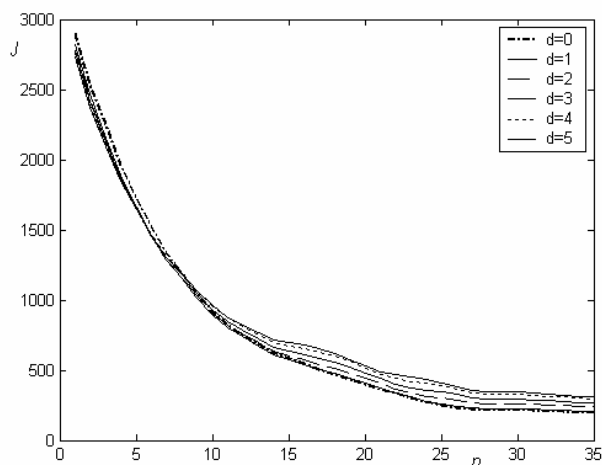
Pretpostavljeno je da je red modela  $n$  poznat, procenjeni su parametri tako usvojenog MA modela i sračunata je vrednost kriterijuma  $J$ . Zatim je skicirana zavisnost kriterijuma  $J$  od vrednosti parametra  $n$  koji se kretao u opsegu od 1 do 35 (slike 3 i 4).



Slika 3. Vrednosti kriterijuma  $J$  za različite vrednosti reda modela  $n$ ;  $L_1=10m$

Na slikama 3 i 4 su prikazane zavisnosti kriterijuma od usvojenog reda modela, za vrednosti kašnjenja od  $d=0$  do  $d=5$ . Polazeći od malih vrednosti parametra  $n$  i njegovim postepenim povećavanjem vrednost kriterijuma značajno smanjuje sve do trenutka kada se

daljim povećavanjem efekat na kriterijumu ne vidi. Plato funkcije se uspostavlja na  $n=27$ , i ova vrednost se može usvojiti za odgovarajući red modela. Ovako veliki red modela može se objasniti topografskim položajem dreniranog područja, ka kome gravitiraju vode sa okolnih viših terena. Otuda se potrebno vreme površinskog i podpovršinskog doticaja odražava kroz velike vrednosti reda modela. Dobijene karakteristike imaju isti oblik, dok tip drenažnog sistema utiče na relativni iznos pojedinih zavisnosti, što znači da su karakteristike zemljišta, koje je zajedničko za obe varijante drenažnog sistema ugrađene u oblike ovih funkcija. Sa slika se vidi da je vrednost srednje kvadratne greške značajno manja za drenažni sistem za manjim međudrenskim rastojanjem ( $L_1=10m$ ).

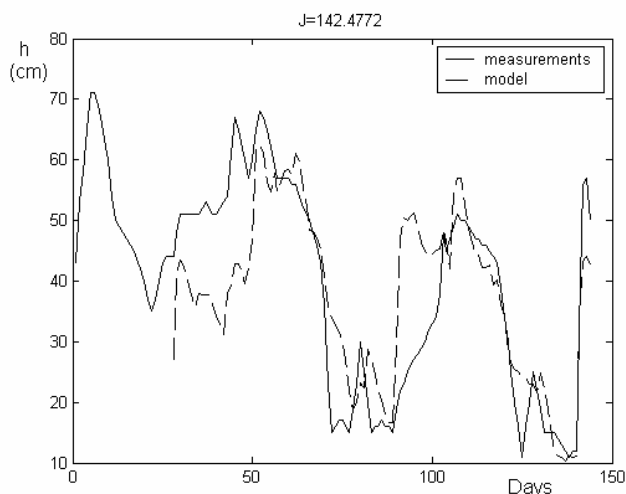


Slika 4. Vrednosti kriterijuma  $J$  za različite vrednosti reda modela  $n$ ;  $L_2=30m$

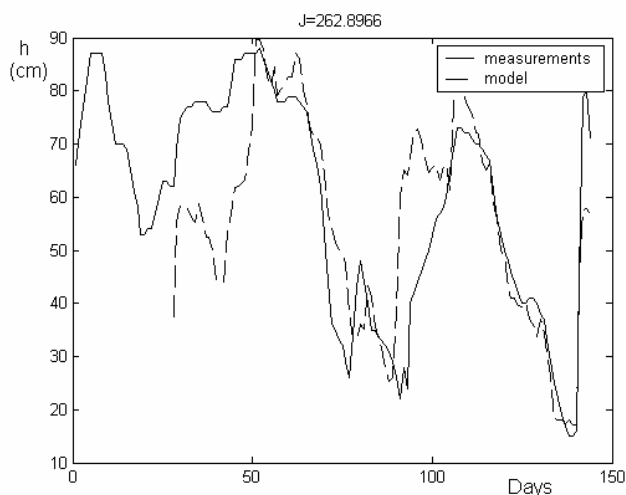
Zanimljivo je da kašnjenje nema značaja (slike 3 i 4), pogotovu za male vrednosti reda modela. Tek kod vrednosti  $n>10$  vidi se razlika u vrednosti funkcije, dok oblik funkcije i dalje ostaje isti, tako da pretpostavka o značajnom uticaju kašnjenja na promenu nivoa podzemnih voda nije održiva. Za vrednosti reda modela  $n>10$ , najmanje vrednosti kriterijuma  $J$  uočavaju se u slučaju da kašnjenje nije uzeto u obzir ( $d=0$ ).

Za vrednosti koje su usvojene kao red modela i red kašnjenja ( $n=27$ ,  $d=0$ ) prikazane su vrednosti visine vode iznad drena ( $h$ ), i to vrednosti dobijene merenjem i vrednosti koje sračunava model (slike 5 i 6). Grubim pogledom već se može uočiti da je model "uhvatio"

fizikalnost procesa jer se u značajnom segmentu ove vrednosti i trendovi podudaraju. Izvesna odstupanja koja postoje između ovih vrednosti ukazuju na postojanje fenomena koje model ne uzima u obzir. Iako je uticaj padavina dominantan, proučavano zemljište obiluje podzemnim vodama, pa postoje uticaji koji nisu vezani isključivo za padavine.



Slika 5. Visina vode iznad drena ( $h$ ) dobijena merenjem i vrednosti koje procenjuje model  $L_j=10m$



Slika 6.- Visina vode iznad drena dobijena merenjem i vrednosti koje procenjuje model  $L_j=30m$

Ovako dobijen MA model se prvenstveno može iskoristiti za višekoračnu predikciju procesa posledice  $y$  na osnovu merenja procesa uzroka  $x$  i na osnovu njega je moguće formirati nivogram dubine podzemne vode. Sa druge strane statistički modeli dobijeni na osnovu eksperimenata često mogu ukazivati na fizičke zakonitosti do kojih teorijska istraživanja nisu došla. Takođe je, na osnovu frekvencijskih karakteristika ovako dobijenog modela, moguće vršiti karakterizaciju filtracionih svojstava zemljišta.

### ZAKLJUČAK

Zavisnost dubine podzemne vode od padavina na dreniranim područjima uspešno se može opisati statističkim modelom MA tipa. Na dreniranom zemljištu tipa euglej zavisnost dubine podzemnih voda od padavina može se opisati MA modelom sa redom modela  $n=27$ . Model je uspešniji na varijantama sa manjim međudrenskim rastojanjem, kod koga je vrednost srednje kvadratne greške značajno manja. Primamljivost statističkih modela je višestruka: Na osnovu njih se može vršiti predikcija kretanja nivoa podzemnih voda, kao i izvršiti karakterizacija filtracionih i hidroloških svojstava zemljišta.

### LITERATURA

- [1] Box, G.E.P. And Jenkins, G.M.: Time series Analysis Forecasting and Control San Francisco Holden-Day. Ed. 1970.
- [2] Papoulis, A.: Probability Random Variables, and Stochastic Processes. New York: McGraw-Hill. Ed. 1965
- [3] Dieleman P.J., Trafford B.D.: Drainage testing, Ed. FAO Irrigation and Drainage Paper, No 28, Rome, 1976

MODELLING OF GROUNDWATER TABLE DEPTH RESPONSE TO  
PRECIPITATION ON THE DRAINAGE AREAS

by

Doc. dr Nevenka ĐUROVIĆ, E-mail: marasn@agrifaculty.bg.ac.yu

Prof. dr Ružica STRIČEVIĆ, E-mail: sruzica@agrifaculty.bg.ac.yu

Faculty of Agriculture, Nemanjina 6, Zemun

## Summary

Modeling of ground water table depth response to precipitation was based on data obtained from the drainage field Radmilovac near Belgrade. Drainage field was consisted of drainage treatment I and II representing drain spacing of  $L_1=10$  m and  $L_2=30$  m, respectively. For the modeling of stochastic process, moving average model (MA) was used. Assuming that rank of the model  $n$  was known, estimation of the MA parameters was carried out. Obtained data were used for calculation of the criterion  $J$ . Then, criterion  $J$  response to parameter  $n$  was plotted. Obtained values range from 1 to 35. Starting from the lower value of the parameter  $n$  and by increasing it gradually value of the criterion was significantly reducing until the moment when further increment had neglected influence. Plateau of the function was established on  $n=27$  and this value can be assumed for the responding rank of the model. Such a great rank of the model could be explained by the lowest topography of the drainage field regarding the whole catchment area, to whom surface and groundwater runoff gravitate. The value of the mean

square error was significantly lower on the drainage treatment I with narrower drain spacing ( $L_1=10$ m).

Logically, groundwater table depth cannot response to precipitation simultaneously. Therefore, certain delay caused by filtration characteristics of the soil was assumed to be in the range from 0 to 5 days in order to estimate its influence on value of the criterion  $J$ . However, results show that assumption of significant delay on groundwater depth variation is not sustainable. Assuming the rank value of the model and rank of the delay ( $n=27$ ,  $d=0$ ) theirs responses to groundwater table depths above the drains ( $h$ ) both by measurement and by model estimation are represented. Mainly, MA model can be used for multistage prediction of the process consequence  $y$  (groundwater table depth) based on the measurement of the process cause  $x$  (precipitation).

Key words: drainage, ground water table, precipitation, MA model

Redigovano 08.12.2005.